平成 25 年度大学院修士課程入学試験問題

物理学 [I]　(125 点)　平成 24 年 8 月 29 日(水)　13:00－14:20

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開かないこと。

(2) 問題冊子はこの表紙を含めて計 4 枚からなり、解答用紙は計 2 枚である。

(3) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4) 解答は問題 [I-A]、[I-B] ごとに別の解答用紙に記入すること。

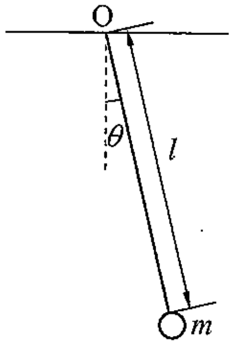
(5) 解答用紙は裏面も使って良い。

解答用紙が足りない場合は試験監督に申し出ること。

(6) 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [I]

[I-A] 図のような単振り子の運動について考える。長さ l の糸の一端は点 O で天井に固定されていて、もう一端には質量 m の質点が取り付けられている。質点は同一鉛直面内を運動する。鉛直方向と糸のなす角を θ、重力加速度の大きさを g とし、糸はたるまないとして以下の問いに答えよ。必要であれば、$\sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 + \cdots$, $\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 + \cdots$ を使って良い。



(1) この単振り子のラグランジュ関数 L を求めよ。ただし、ポテンシャルエネルギーの基準点は質点が最下点に来たときとする。

(2) θ についてのオイラー・ラグランジュ方程式を求めよ。

(3) $|\theta| \ll 1$ の運動を考える。この際、$\sin\theta$ を θ の一次の項で近似して、この運動の角振動数 ω_0 を求めよ。

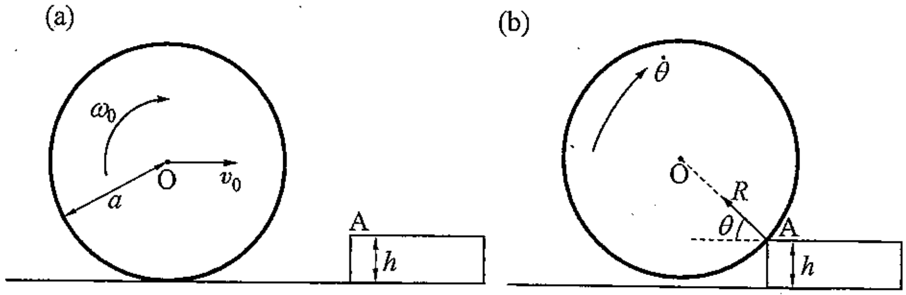
$|\theta|$ が大きくなってくると、この運動の角振動数は ω_0 から外れてくる。以下では、この際の運動について考える。

(4) (1) で求めたラグランジュ関数 L を θ^4 の項まで展開せよ。

(5) 非調和項によってこの運動の周期は $2\pi/\omega_0$ からずれて $2\pi/\omega$ となったとし、運動を記述する近似的な試験関数として $\theta(t) = \alpha\sin\omega t$($\alpha$ および ω は定数)を仮定する。試験関数は正しい解ではないが、ハミルトンの原理を使うことによって最も良い近似となるような試験関数を求めることができる。(4) のラグランジュ関数にこの試験関数を代入して作用積分 I を求めよ。この際、積分範囲は $t = 0$ から $t = 2\pi/\omega$ とせよ。

(6) ある ω に対して、(5) の I を最小にするような α において試験関数は最も良い近似になっている。このことを利用して α を求めよ。ただし、$\alpha > 0$ とする。

[I-B]　図のように、半径 a、質量 M の中空の円筒が床の上を滑らずに角速度 ω_0 で転がりながら重心の速さ v_0 で進み、高さ h の段差に衝突して乗り越える運動を考える。円筒が段差を乗り越える間、段差の角 (かど)A との接触は失われず、接触点で滑らないとする。円筒の重心軸 O と段差の角 A は紙面に垂直方向にある。重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。なお、以下の問いでは $a > h$ の状況のみを考えれば良い。



(1) ω_0 と v_0 の関係を求めよ。

(2) 重心軸 O 周りの円筒の慣性モーメント I_0 を求めよ。

円筒は段差と衝突後、角 A との接触を失わずに角 A を中心として角速度 ω で回転運動を始めたとする。

(3) 円筒が角 A と接しているとき、角 A を通り紙面に垂直な軸周りの円筒の慣性モーメント I を、M, a, I_0 を用いて表せ。

以下の問い (4)〜(6) では、I_0 および I については (2) および (3) の解答を代入せずにそのままの形で用いよ。

(4) この衝突の直前と直後で、角 A を通り紙面に垂直な軸周りの円筒の角運動量は保存されることを利用して、ω を $M, a, h, I, I_0, \omega_0$ を用いて表せ。また、この角運動量が衝突前後で保存される理由を述べよ。

(5) 衝突後、円筒は角 A を中心に回転して段差を乗り越えていく。この際、角 A で滑らないことから力学的エネルギー保存則が適用できる。図 (b) のように AO と水平面のなす角度を θ、その時間微分を $\dot{\theta}$ として、$\dot{\theta}^2$ を $M, a, h, g, I, \theta, \omega$ を用いて表せ。

(6) 円筒が段差を乗り越えるための ω の条件を M, h, g, I を用いて表せ。

続いて、円筒が段差を乗り越える最中に角 A で接触を失わない条件について考える。

(7) 円筒が角Aから受ける抗力のAO方向成分をRとする。$R = M(g\sin\theta - a\dot{\theta}^2)$となることを示せ。

(8) (7)のRについての式に(5)の結果を代入してRの最小値R_{min}を求め、M, a, h, g, ωを用いて表せ。

(9) 円筒が角Aで接触を失わないためのωの条件を求めよ。

(10) 以上の結果を用いて、円筒が角Aの接触を失わずに段差を乗り越えることができるωが存在するために、aとhが満たすべき条件を求めよ。

平成 25 年度大学院修士課程入学試験問題

物理学［II］　(125 点)　平成 24 年 8 月 29 日(水) 14:40－16:00

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開かないこと。

(2) 問題冊子はこの表紙を含めて計 4 枚からなり、解答用紙は計 3 枚である。

(3) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4) 解答は問題［II-A]、[II-B］、[II-C]ごとに別の解答用紙に記入すること。

(5) 解答用紙は裏面も使って良い。

解答用紙が足りない場合は試験監督に申し出ること。

(6) 問題冊子は持ち帰ること。

物理学[II]

以下で電場、電束密度を $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{D}$、磁場、磁束密度を $\boldsymbol{H}$ および $\boldsymbol{B}$、電荷密度を ρ、電流密度を $\boldsymbol{j}$ とする。このとき電磁気学の基本法則であるマクスウェルの方程式は以下の４つである。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \quad \cdots \quad ①$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \quad \cdots \quad ②$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\boldsymbol{0} \quad \cdots \quad ③ \quad (\text{ファラデーの電磁誘導の法則})$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{j} \quad \cdots \quad ④ \quad (\text{アンペール・マクスウェルの法則})$$

尚、解答の際は設問に従い可能な限り途中の導出を記すこと。

[II-A]

(1) ③式と磁場、④式と電場の間の内積をとり、さらにベクトル解析の公式

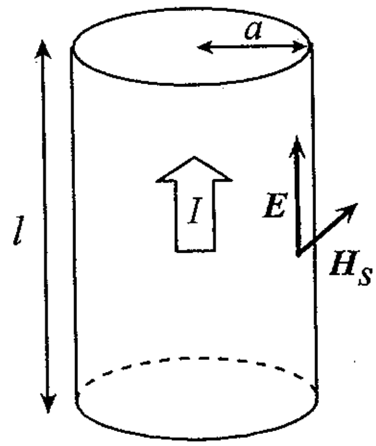
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})$$

を使用して関係式

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\right]=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}+\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) \quad \cdots \quad ⑤$$

を導け。

以下の具体例に従い、導いた⑤式の意味を考えよう。
右図の通り、半径 a、長さ l の円柱状の十分に長い金属棒に軸方向に沿って一様な定電流 $I(=\pi a^2|\boldsymbol{j}|)$ が流れている。この金属棒の電気伝導率 σ は内部の電場 $\boldsymbol{E}$ を用いて $|\boldsymbol{j}|/|\boldsymbol{E}|$ で与えられる。また、定常状態のために⑤式の左辺は 0 であり、円柱の端面の効果は無視できるとする。



(2) アンペールの法則を用いて円柱の側面における磁場 $\boldsymbol{H}_S$ の大きさを求めよ。また、円柱の側面におけるポインティングベクトル $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}_S$ の向きと大きさを求めよ。

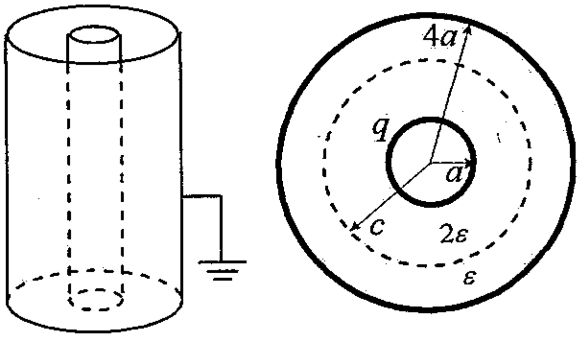
(3) ⑤式の右辺第２項をガウスの法則を用いて円柱全体で体積積分せよ。

(4) ⑤式の右辺第１項を参考に、円柱内部における単位時間、単位長さあたりのジュール熱の発生量を求めよ。

(5) 問(2)、問(4)の結果を参考にすると、ジュール熱として円柱内部で散逸するエネルギーが、円柱の境界からどのようにして供給されているか理解できる。このことを踏まえて、電場および磁場が時間的に変動する場合に⑤式が意味するところを述べよ。

[II-B]

下図のように半径 a と $4a$ の 2 つの導体の円筒を同軸に配したコンデンサーがある。円筒の厚さは無視できるものとする。外側の円筒を接地して内側の円筒に単位長さあたり q の電荷を与えた。このコンデンサーは十分に長いために端の効果は無視できる。



(1) 円筒の中心から測った距離を r として、$a<r<4a$ の範囲におけるコンデンサー内の電束密度の大きさ $D(r)$ を、①式にガウスの法則を適用して求めよ。

(2) 内側の円筒から $r=c\ (a<c<4a)$ の位置まで誘電率 2ε、その外側が誘電率 ε の誘電体で満たされているとき、誘電体中の電場 E は境界面に生じる分極電荷のために $r=c$ 付近で急激に変化する。円筒の中心からの距離の関数として電場強度 $E(r)$ を求め $(a<r<4a)$、グラフに描け。

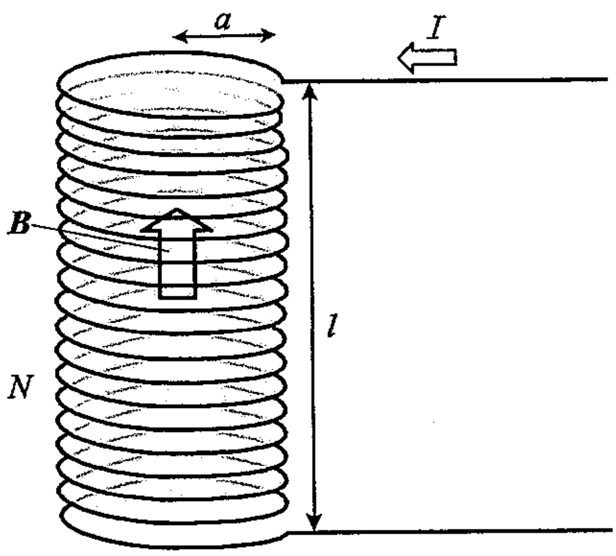
(3) 内側の円筒の電位を求めよ。また、この同軸コンデンサーの単位長さあたりの静電容量を求めよ。

(4) コンデンサー内部の 2 種類の誘電体は、どちらも $E_{\max}$ を超える大きさの電場が加わると破壊されてしまうとする。これを絶縁破壊と呼ぶ。このとき $a<c<2a,\ 2a<c<4a$ のそれぞれの場合について、絶縁破壊を起こさずに内側の円筒に与えることのできる電荷の最大値 $q_{\max}$ と、その際の内側の円筒の電位 V を c の関数として求めよ。

(5) c を変化させることで出来る限り高い電圧に耐え得るコンデンサーを設計したい。コンデンサーの耐電圧が最大になる c を求めよ。また、その時の耐電圧 $V_{\max}$ を求めよ。

[II-C]

下図のように半径 a、総巻き数 N、長さ l のソレノイドコイル（以下ソレノイド）に一定電流 I が流れている。l が十分に長いためにソレノイドの端の効果や外部に漏れる磁場を無視でき、内部には一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が生じているとして以下の問いに答えよ。ただし、ソレノイドの内部の透磁率を μ_0 とする。



(1) アンペールの法則を用いてソレノイドの内部における磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の大きさを求めよ。ただし内部磁場が一様であることを用いてよい。

(2) このソレノイド全体の内部磁場が持つエネルギーを求めよ。

時刻 t から $t+\Delta t$ の間に電流 I を一定に保ったまま長さを l から $l+\Delta l$ まで一様に引き伸ばした。この時ソレノイドの単位長さ当たりの巻き数(N/l)が変化するために磁場が変化する。その結果、電磁誘導の法則によりソレノイドの両端には電圧 $V=-N\,d\Phi/dt$（Φ：磁束）が生じる。このとき生じた電圧は定電流に対して単位時間あたり VI の仕事をしている。

(3) このときソレノイドの長さが変化し終わるまでに電磁誘導により電流系に供給されたエネルギー

$\int_t^{t+\Delta t} VI dt$ を求めよ。

(4) 問(2)、問(3)の結果を参考にすると、定電流が流れているソレノイドに働く力が分かる。ソレノイドは伸びようとするか、縮もうとするかを答え、その理由も述べよ。

平成 25 年度大学院修士課程入学試験問題

物理学［III］　(125 点)　平成 24 年 8 月 29 日(水)　16:20−17:40

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開かないこと。

(2) 問題冊子はこの表紙を含めて計 3 枚からなり、解答用紙は計 2 枚である。

(3) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4) 解答は問題［**1**］、［**2**］ごとに別の解答用紙に記入すること。

(5) 解答用紙は裏面も使って良い。

解答用紙が足りない場合は試験監督に申し出ること。

(6) 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [III]

[1] 質量 m の非相対論的自由粒子の波動関数を $\psi(\boldsymbol{x},t)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\psi(\boldsymbol{x},t)$ が満足するシュレーディンガー方程式を書け。ただしプランク定数 h を 2π で割ったものを $\hbar$ とする。

(2) 波動関数 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ を次のようにフーリエ変換することを考える。

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \phi(\boldsymbol{k},t) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$$

このとき $\phi(\boldsymbol{k},t)$ が満足する方程式を求めよ。

(3) $\phi(\boldsymbol{k},t=0) \equiv \phi(\boldsymbol{k})$ と置いて、上の問題で求めた方程式の解を求めよ。

以下では波動関数 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ が $t=0$ で

$$\psi(\boldsymbol{x},t=0) \equiv \psi(\boldsymbol{x}) = C(a)\exp\left[-\frac{1}{2a^2}\left|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\right|^2\right]$$

で与えられているとする。ただし、$\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ は実定数ベクトル、a は正の実定数である。

(4) ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad (\mathrm{Re}\,\alpha > 0)$$

を用いて、規格化定数 $C(a)$ を求めよ。ただし $C(a)$ は正の実数であるとする。

(5) 時刻 $t=0$ での位置 x ($\boldsymbol{x}$ の x 成分) の期待値 $\langle x(0)\rangle$ を求めよ。また、$(\Delta x)^2(0) \equiv \langle x^2(0)\rangle - \langle x(0)\rangle^2$ を求めよ。

(6) $\phi(\boldsymbol{k})$ を求めよ。

(7) 時刻 $t(>0)$ での波動関数は

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = C(A(t))\exp\left[-\frac{1}{2A^2(t)}\left|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\right|^2\right] \times (\text{位相因子})$$

の形に書けることを示し、この式に現れる正の実数 $A(t)$ を求めよ。

(8) $(\Delta x)^2(t)$ を $\hbar$, m, a, t を用いて表せ。

[2] ハミルトニアンが

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \lambda \hat{V}(t), \qquad \hat{H}_0 = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a}, \qquad \hat{V}(t) = \hbar g(t)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

で与えられる1次元の量子系を考えよう。ただし、$0 < \lambda \ll 1$,

$$g(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\tau}{t^2 + \tau^2} \qquad (\tau > 0),$$

および演算子 $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ は交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を満足するとする。以下の問いに答えよ。

(A) まず無摂動系のハミルトニアン $\hat{H}_0$ の固有値 E の固有状態 $|\phi\rangle$ を考えよう。

$$\hat{H}_0|\phi\rangle = E|\phi\rangle$$

(1) $\hat{a}|\phi\rangle$ がゼロでないとすると、$\hat{a}|\phi\rangle$ は固有値が $E - \hbar\omega$ の $\hat{H}_0$ の固有状態であることを示せ。

このことから、$\hat{H}_0$ の基底状態 ($|0\rangle$ と表すことにする) は $\hat{a}|0\rangle = 0$ を満足しなければならないことがわかる。$\langle 0|0\rangle = 1$ のように規格化されているとしよう。また以下では

$$|n\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n|0\rangle \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

が規格直交化されている ($\langle m|n\rangle = \delta_{m,n}$ $(m, n = 0, 1, 2, \cdots)$) ことを証明せずに用いてよい。

(2) まず $\left[\hat{a}, \left(\hat{a}^\dagger\right)^n\right] = n\left(\hat{a}^\dagger\right)^{n-1}$ を証明することによって、$\hat{H}_0|n\rangle = n\hbar\omega|n\rangle$ であることを示せ。

(3) $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ を証明せよ。

(B) 次に摂動項 $\lambda\hat{V}(t)$ を含めて考える。

(4) 時間に依存するシュレーディンガー方程式の解 $|\psi(t)\rangle$ を

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle c_n(t)e^{-in\omega t}$$

と展開するとき、$c_n(t)$ が満足する微分方程式を求めよ。

(5) $c_n(-\infty) = \delta_{n,0}$ の初期条件の下で、$c_n(+\infty)$ を λ の1次の精度で解け。[ヒント: λ について展開すると、$c_n(t) = c_n(-\infty) + \lambda c_n^{(1)}(t) + \lambda^2 c_n^{(2)}(t) + \cdots$ と書かれる。]

(6) $t = -\infty$ で $\hat{H}_0$ の基底状態にあった系が、摂動 $\lambda\hat{V}(t)$ によって $t = +\infty$ において第1励起状態に遷移する確率を、λ についての展開の最低次で求めよ。

(7) (6) で得られた結果の τ 依存性について、時間とエネルギーについての不確定性関係の観点から定性的に説明せよ。

平成 25 年度大学院修士課程入学試験問題

物理学［IV］　（125 点）　平成 24 年 8 月 30 日（木）9:00−10:20

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開かないこと。

(2) 問題冊子はこの表紙を含めて計 4 枚からなり、解答用紙は計 2 枚である。

(3) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(4) 解答は問題［IV-A］、［IV-B］ごとに別の解答用紙に記入すること。

(5) 解答用紙は裏面も使って良い。

解答用紙が足りない場合は試験監督に申し出ること。

(6) 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [IV]

ボルツマン定数を k_{B}，プランク定数を h とする．また $\hbar = h/2\pi$ とする．必要な公式は出題用紙最後にまとめてある．

[IV-A]

1. 磁場 $H\ (>0)$ 中に1つのイジングスピン $s(s=\pm 1)$ を置き，ハミルトニアンを

$$\mathcal{H} = -Hs \tag{1}$$

とする．この系は温度 T の熱浴に接していて熱平衡状態にあるものとする．

(a) 分配関数 Z を求めなさい．

(b) 磁化 m を計算しなさい．

2. 2次元正方格子の各格子点上に，イジングスピンが置かれている．それらの間にハミルトニアン

$$\mathcal{H} = -J\sum_{(i,j)} s_i s_j, \qquad (J>0) \tag{2}$$

で与えられる相互作用のある場合を考えよう．s_i は格子点 i 上に置かれたイジングスピンで，和は最近接スピンの組 (i,j) についてとり，格子点数は N とし，系は温度 T の熱平衡状態にあるとする．

この系を次の近似の下で考えよう．スピンの平均値を $\langle s\rangle = m$ (m は1格子点あたりの磁化) とし，各スピンの平均からの揺らぎは十分小さいとする．すると系の有効ハミルトニアン $\mathcal{H}_{\mathrm{eff}}$ は

$$\mathcal{H}_{\mathrm{eff}} = -H_{\mathrm{eff}}\sum_i s_i + 2JNm^2, \qquad H_{\mathrm{eff}} = 4Jm \tag{3}$$

と表される．ここで第1項の H_{eff} は4つの最隣接スピンが作る有効磁場で，和は格子点についてとるものとする．第2項は全ての s_i を m に置いたときの全エネルギーが $-2JNm^2$ となることを保証するための項である．有効ハミルトニアン (3) について，以下の問いに答えなさい．

(a) s_i の期待値 $\langle s_i\rangle$ を，H_{eff} 及び温度 T の関数として求めなさい．

(b) 前問で求めた $\langle s_i\rangle$ が1格子点あたりの磁化 m に等しいとし，m についての自己無撞着方程式 (self-consistent equation) を書きなさい．

さらに，この自己無撞着方程式は $m=0$ を常に解として持つこと，及び $T\to 0$ で $m=\pm 1$ も解となることを示しなさい．

(c) 前問の自己無撞着方程式は $m=0$ の解の他に，ある温度 T_{c} 以下では $m\neq 0$ の解も出てくる．この T_{c} を求めなさい．さらに T_{c} より少し低い温度領域では磁化 $|m|$ が十分小さいものとして，$m\neq 0$ の解を求めなさい．

(d) $m=0$ の場合と前問で求めた $m\neq 0$ の場合について，全エネルギーの期待値を計算しなさい．

[IV-B]

1. 体積 V，温度 T，分子数 N_g，分子の質量 m の理想気体の自由エネルギーは

$$F_i = -N_g k_B T \left\{ \frac{3}{2} \ln \left(\frac{m k_B T}{2\pi \hbar^2} \right) + \ln \left(\frac{V}{N_g} \right) + 1 \right\} \tag{4}$$

である．

(a) 理想気体の圧力 p を計算しなさい．

(b) 理想気体のエネルギー E を計算しなさい．

2. 気体中に置かれた固体の表面には，一般に気体の分子が吸着している．この現象を以下のモデルで考察しよう．総数 M 個の気体分子を考える．固体表面には気体分子が吸着できる場所 (吸着点) が N 個あり，吸着できる気体分子は吸着点あたり最大 1 個とする．異なる吸着点に吸着した気体分子同士の相互作用はないとする．気体分子のエネルギーは吸着により 1 個あたり ϵ ($\epsilon > 0$) だけ減少する．また，気体は理想気体とし，その体積 V は一定であるとする．系全体は温度 T の熱平衡状態にあるとし，$M > N \gg 1$ として以下の問いに答えよ．

(a) まず，n ($1 \ll n \leq N$) 個の気体分子が吸着している状況を考える．この時，スターリングの公式を用いて，吸着している気体分子の配置のエントロピーを求めなさい．

(b) 吸着している n 個の気体分子からなる部分系の自由エネルギー F_0 を計算しなさい．

(c) 吸着している気体分子と吸着していない気体分子を合わせた全体の自由エネルギー F を求め，n を変化させたときに F が最小となる条件から，熱平衡状態における吸着した気体分子数 n が満たすべき関係式を求めなさい．

以下では $M \gg N$ として答えなさい．

(d) 吸着点に吸着した気体分子の割合 n/N を求めなさい．

(e) 高温極限 $T \to \infty$ での n/N を求めなさい．

(f) 低温極限 $T \to 0$ での n/N を求めなさい．次に，$T = 0$ の近傍での n/N の振る舞いを，横軸を温度 T, 縦軸を n/N としてグラフの概形を描きなさい．

公式

$$
\begin{aligned}
\sinh(x) &= x + \frac{1}{6}x^3 + \cdots \\
\cosh(x) &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \cdots \\
\tanh(x) &= x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \tanh(x) = \pm 1$$

スターリングの公式

$$\ln N! \approx N(\ln N - 1) \qquad (N \gg 1)$$