# 令和7年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [I] (125点)　令和6年8月26日(月)　13:00 – 14:20

注意事項

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子はこの表紙を含めて 5 頁 (空白の頁を除く), 解答紙は 2 枚である。
3. すべての解答紙に受験番号を記入すること。
4. 大問ごとに指定された解答紙に解答すること。ただし，指定された解答紙の裏面も使ってよい。
5. 問題冊子は持ち帰ること。

# 物理学 [I]

## [I-A]

図 1 のように，一辺の長さ $2a$, 質量 $M$ の均質な立方体が，原点 O において一つの辺を水平面に接触させて点線で示す平衡配置で静止している。水平右方向に $x$ 軸，鉛直上向きに $y$ 軸をとる。立方体の重心 G を $y$ 軸からわずかに右に傾けて静かに手を離したときの運動を考える。水平面と立方体の底面との間の角度を反時計回りを正として $\theta$ とする $(0 \leq \theta \leq \frac{1}{4}\pi)$。重力加速度は鉛直下向きで，大きさを $g$ とする。以下の問いに答えよ。

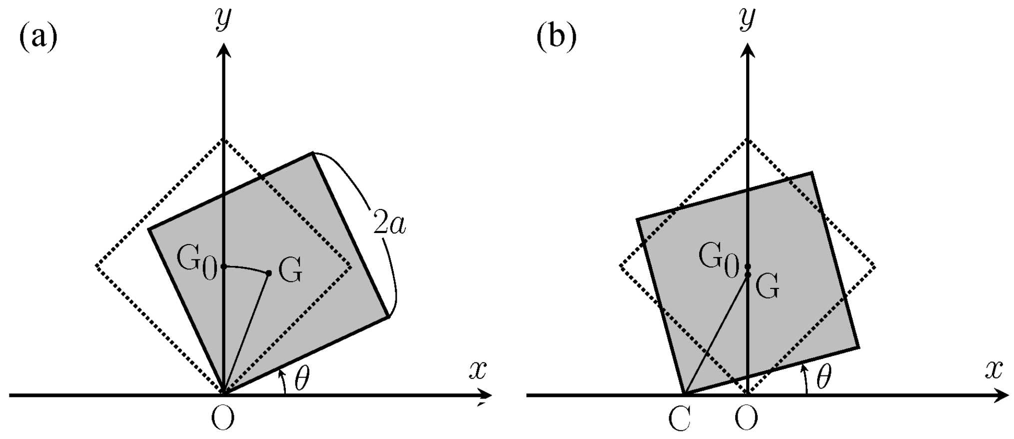


図 1

**問 1.** 立方体の重心 G と 原点Oを通る紙面に垂直な軸周りの慣性モーメントをそれぞれ $I_{\mathrm{G}}$ と $I_{\mathrm{O}}$ とし，

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{G}} &= \frac{2}{3}Ma^2 \\ I_{\mathrm{O}} &= \frac{8}{3}Ma^2 \end{aligned}$$

と表せることを示せ。

以下では $I_{\mathrm{G}}$ と $I_{\mathrm{O}}$ を用いずに，$M$ と $a$ を用いて慣性モーメントを表記せよ。ただし，途中計算では $I_{\mathrm{O}}$ と $I_{\mathrm{G}}$ を用いてもよい。

**問 2.** 図 1(a) のように，水平面と接触している辺が滑らない場合を考える。立方体の一つの面が平面と接触するとき，原点 O まわりの立方体の角速度の大きさを求めよ。

**問 3.** 図 1(b) のように，水平面と接触している辺が，水平面を摩擦なく自由に滑る場合を考える。立方体の一つの面が平面と接触するとき，接触点 C まわりの立方体の角速度の大きさを求めよ。

次に，図 2 のように，立方体が摩擦のない平らな床の上を速さ $v_0$ で動いている場合を考える。床と接する進行方向の辺が原点 O で小さな段差と衝突後，原点 O との接触を保ったまま，原点 O を中心として時計回りに回転運動を始めた。段差の高さは立方体の一辺に比べて十分小さいものとして，以下の問いに答えよ。

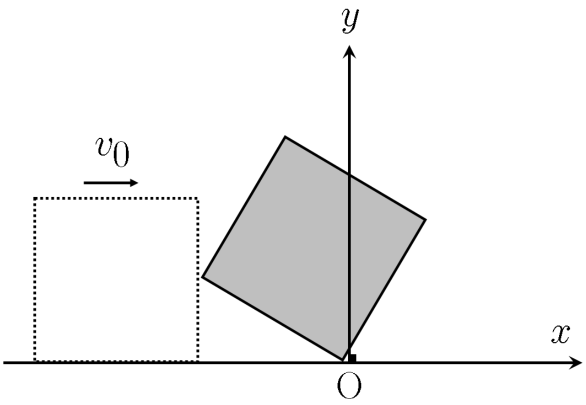


図 2

**問 4.** 立方体が段差に衝突した直後の，立方体の原点 O まわりの角速度の大きさを，$M$, $a$, $g$, $v_0$ の中から必要なものを用いて表せ。

**問 5.** 立方体の重心が $x > 0$ の領域に転がるのに必要な最小の初速度 $v_0$ を，$M$, $a$, $g$ の中から必要なものを用いて表せ。

## [I-B]

振り子の支点が滑らかに動くことができる単振り子の運動について考える。図 3 のように，質量が無視できる長さ $\ell$ の糸の一端は質量 $m_1$ のおもり A に取り付けられていて，もう一端には質量 $m_2$ のおもり B が繋がっている。水平右方向に $x$ 軸，鉛直上向きに $y$ 軸をとる。おもり A は $x$ 軸に沿って滑らかに動き，おもり B は $xy$ 平面内を動くものとする。ひもが鉛直下向きとなす角を，反時計回りの方向を正として $\theta$ とする。重力加速度は鉛直下向きで大きさを $g$ とし，糸はたるまないものとして，以下の問いに答えよ。

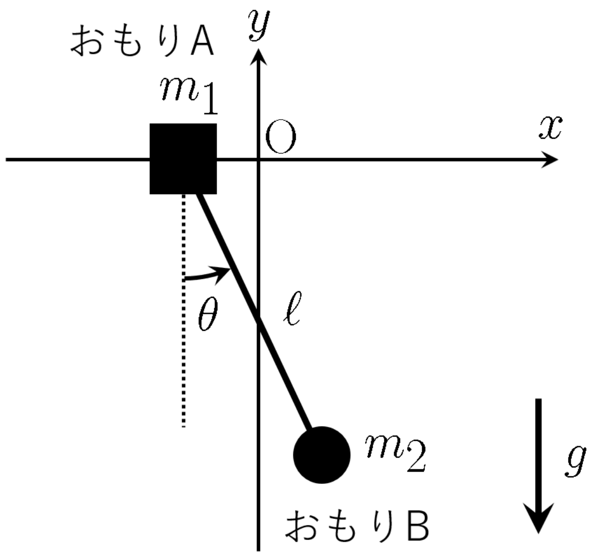


図 3

**問 1.** おもり A の座標を $(x_1, 0)$ として，おもり B の座標 $(x_2, y_2)$ を $x_1$，$\ell$，$\theta$ を用いて表せ。

**問 2.** この系の位置エネルギー $U$ を $m_1$，$m_2$，$x_1$，$\ell$，$\theta$ の中から必要なものを用いて表せ。ただし，おもり A のある高さ $(y = 0)$ を位置エネルギーがゼロとなる基準点とせよ。

**問 3.** おもり A とおもり B のそれぞれの運動エネルギー $K_A$ と $K_B$ を，$m_1$，$m_2$，$x_1$，$\ell$，$\theta$，$\dot{x_1}$，$\dot{\theta}$ の中から必要なものを用いて表せ。

**問 4.** この系のラグランジアン $L$ を書き下し，$x_1$ と $\theta$ に関するオイラー・ラグランジュ方程式を求めよ。

以下の設問では $|\theta| \ll 1$ の運動を考え, $\theta$ と $\dot{\theta}$ の2次以上の項は無視してよい。

**問 5.** $\ddot{x}_1$ と $\ddot{\theta}$ の関係を，$m_1$，$m_2$，$x_1$，$\ell$，$g$ の中から必要なものを用いて表せ。

**問 6.** **問 5** で求めた関係を用いて，$\theta$ に関する運動方程式を導出せよ。

**問 7.** おもり A とおもり B がそれぞれ $x_1 = 0$, $\theta = 0$ で静止していた状態から，時刻 $t = 0$ でおもり A に水平方向の力積 $I$ を与える。力積が作用した直後の $\dot{x}_1(t = 0)$ と $\dot{\theta}(t = 0)$ を求めよ。

**問 8.** **問 7** で得られた $\dot{x}_1(t = 0)$ と $\dot{\theta}(t = 0)$ を初期条件として，**問 6** で求めた $\theta$ に関する運動方程式を解け。解を $\theta(t) = \theta_0 \sin \omega t$ として, $\theta_0$ と $\omega$ を, $m_1$，$m_2$，$\ell$，$g$，$I$ の中から必要なものを用いて表せ。

**問 9.** **問 8** で得られた $\theta$ の解を**問 5** で求めた $\ddot{x}_1$ と $\ddot{\theta}$ の関係に代入して，$x_1$ に関する運動方程式の解を求めよ。解を次のような振動解

$$x_1(t) = \boxed{\quad (\text{あ}) \quad} \sin \omega t + \boxed{\quad (\text{い}) \quad}\, t$$

として，（あ）と（い）を, $m_1$，$m_2$，$\ell$，$g$，$I$，$\theta_0$，$\omega$ の中から必要なものを用いて表せ。また，$\theta(t)$ と，$x_1(t)$ のうちの振動を示す部分について，それらの位相の関係を述べよ。

# 令和７年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [II] (125 点)　令和 6 年 8 月 26 日 (月)　14:40 – 16:00

注意事項

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子はこの表紙を含めて 4 頁 (空白の頁を除く)，解答紙は 2 枚である。
3. すべての解答紙に受験番号を記入すること。
4. 大問ごとに指定された解答紙に解答すること。ただし，指定された解答紙の裏面も使ってよい。
5. 問題冊子は持ち帰ること。

# 物理学 [II]

真空の誘電率を $\varepsilon_0$，透磁率を $\mu_0$ とする。3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする。

## [II-A]

真空中の静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ に関する問題を考える。

**問 1.** $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ とそれに対応する静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ の関係式を書け。

**問 2.** ガウスの法則の微分形を $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ および空間電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ を用いて表せ。

**問 3.** 電荷 $q$ の点電荷が原点に存在し，他の場所には電荷が存在しないときの $\rho(\boldsymbol{r})$ を表す式を書け。ただし，3 次元空間におけるデルタ関数を $\delta^3(\boldsymbol{r})$ と表すこと。

以下では，$r = |\boldsymbol{r}|$ とする。

**問 4.** $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$ において，$\nabla \cdot \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ を計算し，その結果を示せ。

**問 5.** 原点を中心とする半径 $a$ の球面で囲まれた領域 $V$ において，$\displaystyle\int_V \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\,\mathrm{d}V$ の値を求めよ。ただし $\mathrm{d}V$ は体積要素とする。

**問 6.** **問 4** および**問 5** の結果より，任意の閉領域 $V'$ における $\displaystyle\int_{V'} \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\,\mathrm{d}V$ の結果は原点が $V'$ の外側にある場合と内側にある場合で異なることがわかる。このことを踏まえ，任意の $\boldsymbol{r}$ に対して，$\nabla \cdot \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ の結果を $\delta^3(\boldsymbol{r})$ を用いて表せ。

以下では，静電ポテンシャルが

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-r/a}}{r}$$

である場合について考える。ただし $a$ および $q_0$ は正の実数であるとする。

**問 7.** 電場を $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = f(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ と置く。$r$ の関数としてのスカラー $f(r)$ を求めよ。

**問 8.** 全空間の電荷の総量を求めよ。

**問 9.** $\rho(\boldsymbol{r})$ を求めよ。なお，以下の関係式を用いてもよい。
a) $r$ の関数としてのスカラーを $h(r)$，$\boldsymbol{r}$ の関数としてのベクトルを $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})$ としたとき，$\nabla \cdot (h(r)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})) = \nabla h(r) \cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) + h(r)\nabla \cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})$
b) 原点で発散しない $r$ の関数を $j(r)$ としたとき，$j(r)\,\delta^3(\boldsymbol{r}) = j(0)\,\delta^3(\boldsymbol{r})$

**問 10.** **問 9** で得た $\rho(\boldsymbol{r})$ は，原点に存在する点電荷による電荷密度と，その点電荷を取り囲む電荷分布による電荷密度を合わせたものであると解釈できる。原点の点電荷だけを取り除いたとき，残りの電荷分布の総電荷を求めよ。

## [II-B]

図 1 のように $z=0$ 面を境界面として $z<0$ 側に真空，$z>0$ 側に誘電率 $\varepsilon_1$，透磁率 $\mu_0$ の絶縁体がある。角振動数 $\omega$ $(\omega>0)$ の平面電磁波が真空側から入射し，境界面で反射または絶縁体へ透過する。$x, y, z$ 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ とし，図 1 において $y$ 軸正の向きは紙面に垂直で表から裏の向きとする。時刻 $t$ における入射波，反射波，透過波の磁場をそれぞれ，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_i &= A_i\, \boldsymbol{e}_y \cos(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \quad (z \leq 0),\\
\boldsymbol{H}_r &= A_r\, \boldsymbol{e}_y \cos(\boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \quad (z \leq 0),\\
\boldsymbol{H}_t &= A_t\, \boldsymbol{e}_y \cos(\boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \quad (z \geq 0)
\end{aligned}$$

とする。ここで $A_i, A_r, A_t$ は実数であり，$\boldsymbol{k}_i, \boldsymbol{k}_r, \boldsymbol{k}_t$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{k}_i &= k_0 \sin\theta_0\, \boldsymbol{e}_x + k_0 \cos\theta_0\, \boldsymbol{e}_z,\\
\boldsymbol{k}_r &= k_0 \sin\theta_0'\, \boldsymbol{e}_x - k_0 \cos\theta_0'\, \boldsymbol{e}_z,\\
\boldsymbol{k}_t &= k_1 \sin\theta_1\, \boldsymbol{e}_x + k_1 \cos\theta_1\, \boldsymbol{e}_z
\end{aligned}$$

と表されるものとする。図 1 に示すように $\boldsymbol{k}_i, \boldsymbol{k}_r, \boldsymbol{k}_t$ はそれぞれ $x$-$z$ 平面内にあり，$k_0 = |\boldsymbol{k}_i| = |\boldsymbol{k}_r|$ および $k_1 = |\boldsymbol{k}_t|$ を満たすものとする。また，$\theta_0, \theta_0', \theta_1$ はそれぞれ入射角，反射角，屈折角である。これらの磁場は方程式

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0, \quad \varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_0 & (z<0) \\ \varepsilon_1 & (z>0) \end{cases}$$

を満たす。

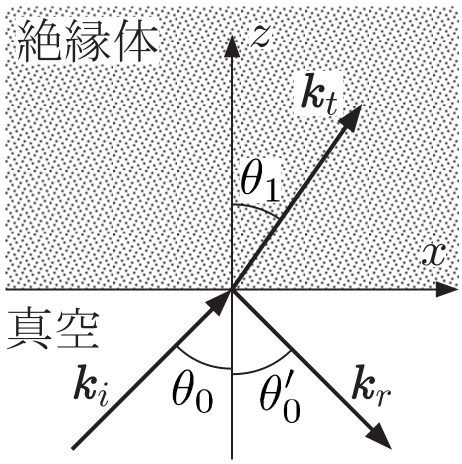


図 1

**問 1.** $k_0$ を $\mu_0, \varepsilon_0, \omega$ を用いて表せ。

**問 2.** 真空の屈折率を 1，絶縁体の屈折率を $n$ とするとき，分散関係および位相速度と屈折率の関係を使って，比 $\dfrac{k_1}{k_0}$ および $\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}$ をそれぞれ $n$ のみを用いて表せ。

**問 3.** 入射波，反射波，透過波の磁場の $y$ 成分をそれぞれ $H_{iy}, H_{ry}, H_{ty}$ とする。磁場の $y$ 成分が $z=0$ の境界面上で連続である，すなわち $z=0$ において $H_{iy}+H_{ry}=H_{ty}$ であることをマクスウェル方程式の 1 つ

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \quad \varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_0 & (z<0) \\ \varepsilon_1 & (z>0) \end{cases}$$

を用いて証明せよ。なお，証明においては，図 2 のように $y$-$z$ 平面 $(x=0)$ 上において，$z=0$ の境界面をまたぐ，$y$ 方向の幅が $\ell$, $z$ 方向の幅が $h$ の微小な長方形の閉経路 a → b → c → d → a を考えること。

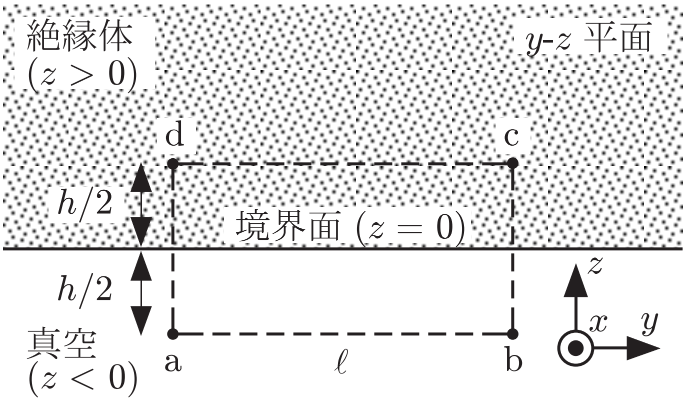


図 2

**問 4.** **問 3** で考えた，$z=0$ における境界条件 $H_{iy}+H_{ry}=H_{ty}$ は，$x$ 座標によらず成立することに注意して，$\theta_0=\theta_0'$ および $\sin\theta_0 = n\sin\theta_1$ が成り立つことをそれぞれ示せ。

**問 5.** 入射波，反射波，透過波の電場をそれぞれ $\boldsymbol{E}_i, \boldsymbol{E}_r, \boldsymbol{E}_t$ とし，これらの $x$ 成分をそれぞれ $E_{ix}, E_{rx}, E_{tx}$ とすると，$z=0$ における境界条件 $E_{ix}+E_{rx}=E_{tx}$ が成り立つ。そこで，この境界条件と，**問 3** のマクスウェル方程式を利用して，$A_i, A_r, A_t$ が満たす方程式を求めよ。なお，それぞれの波の電場に静電場の成分はないものとする。

**問 6.** **問 3** で考えた境界条件および**問 5** の結果を利用することにより，$A_i$ と $A_r$ の関係式を求めよ。

**問 7.** ある入射角 $\theta_0$ では反射波が完全に無くなる。このときの $\tan\theta_0$ の値を $n$ のみを用いて表せ。

# 令和７年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [III] (125点)　令和6年8月26日(月)　16:20 – 17:40

注意事項

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子はこの表紙を含めて 5 頁 (空白の頁を除く)，解答紙は 2 枚である。
3. すべての解答紙に受験番号を記入すること。
4. 大問ごとに指定された解答紙に解答すること。ただし，指定された解答紙の裏面も使ってよい。
5. 問題冊子は持ち帰ること。

# 物理学 [III]

## [III-A]

量子力学の状態ベクトル $|\phi\rangle$ と $|\psi\rangle$ に対して，それらの内積を $\langle\phi|\psi\rangle$ とあらわす。ある物理量 $A$ の量子力学的期待値 $\langle A\rangle$ は，対応する量子力学的演算子を $\hat{A}$，注目している量子力学的状態を $|\psi\rangle$ として，

$$\langle A\rangle \equiv \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle \tag{1}$$

で与えられる。また，複素数 $z$ の複素共役を $z^*$ としたときに，演算子 $\hat{A}$ に対して

$$\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle^* = \langle\psi|\hat{A}^\dagger|\phi\rangle \tag{2}$$

の関係を満たす $\hat{A}^\dagger$ を $\hat{A}$ のエルミート共役と呼ぶ。$\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ となる演算子 $\hat{A}$ をエルミート，$\hat{A}^\dagger = -\hat{A}$ となる演算子 $\hat{A}$ を反エルミートであるという。

**問 1.** 以下の性質を示せ。

(a) エルミート演算子の期待値は実数である。

(b) 反エルミート演算子の期待値は純虚数である。

(c) エルミート演算子 $\hat{A}$ に対して，期待値からの差を与える演算子，

$$\overline{A} \equiv \hat{A} - \langle A\rangle \tag{3}$$

はエルミートである。

(d) $\hat{A}$ と $\hat{B}$ がエルミートのとき，$\{\hat{A},\hat{B}\} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ はエルミートである。

(e) $\hat{A}$ と $\hat{B}$ がエルミートのとき，$[\hat{A},\hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ は反エルミートである。

**問 2.** 一般の状態 $|\psi_1\rangle$ と $|\psi_2\rangle$ の内積に対して成り立つシュワルツの不等式，

$$\langle\psi_1|\psi_1\rangle\langle\psi_2|\psi_2\rangle \geq |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2 \tag{4}$$

を用いて，エルミート演算子 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ に対して不等式

$$\langle\psi|\overline{A}^2|\psi\rangle\langle\psi|\overline{B}^2|\psi\rangle \geq \left|\langle\psi|\overline{A}\,\overline{B}|\psi\rangle\right|^2 \tag{5}$$

を示せ。

**問 3.** さらに恒等式

$$\overline{A}\,\overline{B} = \frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2}\{\overline{A},\overline{B}\} \tag{6}$$

に注意することで，

$$\langle\psi|\overline{A}^2|\psi\rangle\langle\psi|\overline{B}^2|\psi\rangle \geq \frac{1}{4}\left|\langle\psi|[\hat{A},\hat{B}]|\psi\rangle\right|^2 \tag{7}$$

を示せ。

**問 4.** 演算子 $\hat{A}$ に対応した物理量の期待値からの標準偏差は,

$$\Delta A \equiv \sqrt{\langle\psi|\overline{A}^2|\psi\rangle} \tag{8}$$

で与えられる。$\hat{x}$ と $\hat{p}$ を一次元空間の点粒子の座標演算子と運動量演算子としたとき，前問の結果を用いて，不確定性関係

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar \tag{9}$$

を示せ。

**問 5.** 前問の不確定性関係 (9) で，等号が成り立つ場合，つまり座標と運動量の間の不確定性が最も小さくなる場合の粒子の波動関数を求めたい。シュワルツの不等式 (4) において等号が成立するのは，ある複素数 $z$ が存在して $|\psi_1\rangle = z|\psi_2\rangle$ となる場合である。また，不等式 (7) で等号が成り立つのは

$$\langle\psi|\{\overline{A}, \overline{B}\}|\psi\rangle = 0 \tag{10}$$

の場合である。これらのことから，座標と運動量の間の不確定性が最も小さくなるのは，ある実数 $r$ が存在して、状態ベクトル $|\psi\rangle$ が,

$$\overline{x}|\psi\rangle = ir\overline{p}|\psi\rangle, \tag{11}$$

つまり,

$$(\hat{x} - \langle x\rangle)\,|\psi\rangle = ir(\hat{p} - \langle p\rangle)|\psi\rangle, \tag{12}$$

となる場合であることを示せ。

**問 6.** 粒子の波動関数 $\psi(x)$ は，$\hat{x}$ の固有ベクトルを $|x\rangle$ として，$\psi(x) \equiv \langle x|\psi\rangle$ で与えられる。このとき

$$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x) \tag{13}$$

であり，(12) 式は波動関数 $\psi(x)$ に対する微分方程式を与える。この微分方程式を解くことで，$\psi(x)$ を求めよ。ただし，必要であれば,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\exp\left(-\alpha x^2\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{14}$$

を用いてよい。ただし，$\alpha$ は正の実数である。

## [III-B]

以下で与えられるポテンシャル $V(x)$ 中での質量 $m$，電荷 $e$ の粒子の一次元の運動を考えよう。

$$V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} \tag{1}$$

以下の問いに答えよ。ただし，エルミート多項式 $H_n(x)$ に関する以下の公式を，必要に応じて証明なしに用いてよい。

$$\begin{aligned}
&H_n(x) = (-1)^n \exp\left(x^2\right) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \exp\left(-x^2\right) \\
&\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 2n\right) H_n(x) = 0 \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, H_n(x) H_m(x) \exp\left(-x^2\right) = \sqrt{\pi}\, 2^n n!\, \delta_{nm}
\end{aligned} \tag{2}$$

**問 1.** この粒子のエネルギー固有関数を $\psi(x)$，エネルギー固有値を $\epsilon$ として，時間に依存しないシュレディンガー方程式を書け。

**問 2.** $\alpha = \sqrt{\dfrac{m\omega}{\hbar}}$，$y = \alpha x$ と変数変換して，前問のシュレディンガー方程式を書き直せ。

**問 3.** 前問の微分方程式の一般解は，$y$ の多項式である $\phi(y)$ を用いて，

$$\psi\left(\frac{y}{\alpha}\right) = \phi(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \tag{3}$$

となる。指数関数の部分がこのような形をしていることを説明せよ。

**問 4.** $\phi(y)$ についての微分方程式に書き直し，エルミート多項式の満たす微分方程式であることを示せ。

**問 5.** 前問の微分方程式より，$n$ 番目 ($n = 0, 1, 2, \ldots$) の規格化されたエネルギー固有関数 $\psi_n(x)$ とエネルギー固有値 $\epsilon_n$ を求めよ。ただし，$\epsilon_0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < \cdots$ とする。

**問 6.** 横軸を $x$，縦軸をエネルギーとして，ポテンシャルの概形を図示せよ。また，$n = 0$, 1, 2 に対するエネルギー準位を同じ図に示して，対応する固有関数の概形を図示せよ。ただし，固有関数の概形の縦方向の大きさは任意であるとする。

ある時刻 $t = 0$ に大きさ $E$ の一様電場が印加され，ポテンシャル $V(x)$ が以下のようになった。

$$V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} - eEx \tag{4}$$

**問 7.** この時の粒子のエネルギー固有関数 $\varphi_n(x)$ とエネルギー固有値 $\epsilon'_n$ を求めよ。

**問 8.** 電場が印加された瞬間 $t = 0$ での波動関数 $\psi(x, 0)$ は,

$$\psi(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(x) \tag{5}$$

のように，**問 7** の固有関数 $\varphi_n(x)$ と展開係数 $A_n$ で展開できる。$t \geq 0$ での時間発展する波動関数 $\psi(x, t)$ を，$\varphi_n(x)$，$A_n$ および $t \geq 0$ でのエネルギー固有値 $\epsilon'_n$ を用いて書け。

# 令和７年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [IV] (125点)　令和6年8月27日(火)　9:00 – 10:20

注意事項

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子はこの表紙を含めて 5 頁 (空白の頁を除く)，解答紙は 3 枚である。
3. すべての解答紙に受験番号を記入すること。
4. 大問ごとに指定された解答紙に解答すること。ただし，指定された解答紙の裏面も使ってよい。
5. 問題冊子は持ち帰ること。

# 物理学 [IV]

## [IV-A]

熱力学に従う系を考える。次の問いに答えなさい。

**問 1.** 系の内部エネルギーを $U$ とするとき，系の温度 $T$，エントロピー $S$，圧力 $p$，体積 $V$，化学ポテンシャル $\mu$，粒子数 $N$ を用いて，熱力学第一法則（内部エネルギーの全微分 $\mathrm{d}U$）を書きなさい。

**問 2.** 次の等式が成り立つことを示しなさい。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{T,N} = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,N} - p$$

**問 3.** 状態方程式が $p = f(V)T$ の形で表される物質の内部エネルギーはその体積に依存しないことを示しなさい。ただし，$f(V)$ は $V$ のみの関数である。

## [IV-B]

$M$ 個の粒子により構成された気体がある。粒子同士の相互作用は無視できるくらい小さいとする。この気体が温度 $T_0$ の熱浴と接しているとき，次の問いに答えなさい。以下では，ボルツマン定数を $k_B$ として，$\beta_0 = \dfrac{1}{k_B T_0}$ と書く。

**問 1.** この気体の分配関数を $Z$ と書くとき，気体のエネルギーの期待値 $\langle E \rangle$ と分散 $\sigma^2 = \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle$ をそれぞれ，$Z$ と $\beta_0$ を用いて，表しなさい。

**問 2.** この気体の体積が一定のとき，熱容量 $C$ を計算し，$k_B$，$\beta_0$，$\sigma^2$ を用いて表しなさい。

**問 3.** エネルギーと熱容量が共に示量的であることに注意して，通常熱平衡では，エネルギーのゆらぎ $\sigma$ が熱力学極限で無視できることを説明しなさい。

この気体を熱浴から切り離し，$N_0$ 個の吸着中心を持つ表面と静かに接したところ，気体は温度 $T$，化学ポテンシャル $\mu$ で表面と熱的，化学的に平衡な状態になった。この表面に着目すると，吸着中心に結合した気体粒子が平均で $N$ 個観察された。吸着中心同士は独立していて，それぞれの吸着中心には最大で一つの気体粒子が結合できるものとする。このとき，$\beta = \dfrac{1}{k_B T}$ を用いて，次の問いに答えなさい。ただし，$N_0 \ll M$ であり，気体粒子が結合していない吸着中心のエネルギーをゼロとする。

**問 4.** 吸着中心に結合した一つの気体粒子の分配関数 $a(T)$ を答えなさい。ここで，結合した気体粒子は，エネルギーが $\epsilon_i$ で与えられる状態 $i = 1,\ 2,\ \cdots$ のいずれかをとるとする。

**問 5.** **問 4** を踏まえて，表面の大分配関数が

$$\Xi = [1 + \alpha\, a(T)]^{N_0} \tag{1}$$

と表されることについて，大分配関数の定義に注意して，物理的に説明しなさい。特に，どうして $N_0$ 乗が現れるのか，$1 + \alpha a(T)$ の 1 とは何を表すのか，$\alpha a(T)$ は何を表すのか，の 3 つのポイントを押さえること。また，係数 $\alpha$ を，$\mu$ を用いて，表しなさい。

**問 6.** 化学ポテンシャル $\mu$ を，$N_0$，$N$，$\beta$，$a(T)$ を用いて表しなさい。

## [IV-C]

温度 $T$ の溶液中の1本の直鎖状高分子に着目する。直鎖状高分子は $N$ 本の長さ $b$ の剛体棒が $N-1$ 個の関節によりつながったものとして考えてよい。それぞれの関節は異なる2本の剛体棒を繋ぎ，自由に折れ曲がることができる。剛体棒同士，関節同士，剛体棒と関節の間には相互作用は働かないものとする。剛体棒の内部エネルギーは無視できるとして，熱平衡状態を考える。高分子の重合度 $N$ が十分に大きいとして，ボルツマン定数 $k_B$ を用いて，以下の問いに答えなさい。ただし，必要であればガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

は証明なしに用いてもよい。ただし，$a$ は正の定数。

溶液の混み合いのため，着目する高分子は1次元的な管の中に閉じ込められているとする。高分子の片方の端を原点にこの管に沿って $x$ 軸をとると，剛体棒は $+x$ または $-x$ の向きを向いている（図1）。$+x$，$-x$ の向きを向いている剛体棒の個数をそれぞれ $N_+$，$N_-$ とすると，高分子の両端間の距離は $L = b(N_+ - N_-)$ である。

**問 1.** $N_+$，$N_-$ をそれぞれ，$N$，$b$，$L$ を用いて，表しなさい。

**問 2.** $N_+$ と $N_-$ が定まったとき，この高分子の取りうる全てのエネルギー $E$ の値と対応する状態数を答えなさい。

**問 3.** スターリング近似 $\ln x! \simeq x(\ln x - 1)$ を用いると，この高分子のヘルムホルツの自由エネルギー $F(L)$ は

$$F(L) = -\frac{k_BTN}{2}\left\{2\ln 2 - \left(1+\frac{L}{Nb}\right)\ln\left[1+\frac{L}{Nb}\right] - \left(1-\frac{L}{Nb}\right)\ln\left[1-\frac{L}{Nb}\right]\right\}$$

で与えられる。このことを示しなさい。

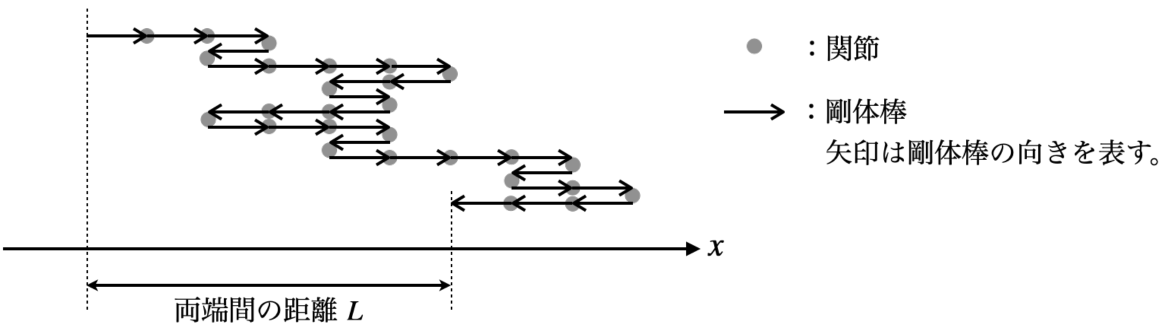


図 1

次に，高分子の全長に比べて，両端間の距離が十分に短いと仮定する。ヘルムホルツの自由エネルギー $F(L)$ において微小量 $\left|\dfrac{L}{Nb}\right| \ll 1$ の最低次の依存性まで考えて，次の問いに答えなさい。

**問 4.** この高分子の分配関数が

$$Z(L) = C(N)\, 2^N \exp\left[-\frac{L^2}{2Nb^2}\right]$$

のように表されることを示しなさい。ここでは微小量の最低次で近似したことによる補正 $C(N)$ の具体的な関数形を求める必要はない。

**問 5.** 高分子の両端に働く張力の大きさとその向きをそれぞれ求めなさい。

**問 6.** 高分子の両端に働く張力の大きさを一定に保ったまま溶液の温度を上げると，高分子の両端間の距離がどのようになると期待されるか論じなさい。

最後に，高分子の両端間の距離の見積もりを考える。依然として $\left|\dfrac{L}{Nb}\right| \ll 1$ を仮定し，この仮定のもとで $L$ は連続量として扱って良いとする。

**問 7.** 高分子の両端間の距離が $L$ のときの状態数を $W(L)$ と書く。全ての $L$ についての剛体棒の並べ方を足し合わせると $2^N$ になることと，$N_+$ が一つ増えると $L$ は $2b$ だけ増えることから

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}L\, W(L) = 2^N \cdot 2b$$

である。ここで，$L$ が大きくなると $W(L)$ が急速に小さくなると仮定して，$L$ の範囲は $-\infty < L < \infty$ とした。
このとき，$W(L)$ が

$$W(L) = \frac{2^{N+1}}{\sqrt{2\pi N}} \exp\left[-\frac{L^2}{2Nb^2}\right]$$

で与えられることを示しなさい。

**問 8.** 高分子の両端間の距離の期待値 $\langle L \rangle$ と分散 $\langle (L - \langle L \rangle)^2 \rangle$ を求めなさい。