平成２６年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [I] (125 点)　平成 25 年 8 月 28 日(水)　13:00 - 14:20

注意事項

１. 指示があるまで、この問題冊子を開けないこと。

２. 問題冊子１部、解答冊子１部が配布されていることを確認すること。

３. 解答開始の合図の後、解答を始める前に、問題冊子はこの表紙を含めて計４枚であり、解答用紙が計３枚であることを確認し、すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

４. 問題 [I-A]、[I-B]および[I-C]の解答は、それぞれの解答用紙に記入すること。

５. 解答用紙は裏面も使ってよい。裏面を使っても足らない場合には、試験監督に申し出ること。

６. 解答に際しては、特に指定のある場合を除いて、最終的な答のみでなく、その導出過程も説明すること。

７. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

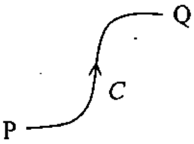
物理学［I］

〔I-A〕保存力の定義を以下のように与える。

> **保存力の定義：** 保存力とは、質点が任意の2点間を移動したときに力のした仕事が、途中の経路などによらず、始点と終点のみによるもの。

これに基づき以下の問いに答えよ。

1. 保存力と非保存力の具体的な例をそれぞれ一つずつ挙げよ。
2. 始点Pで終点Qの、ある曲線Cに沿った積分



$$\phi = \int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}') \cdot d\boldsymbol{r}'$$

を考える。$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$が保存力の場合、終点Qを固定し、始点Pの座標を$\boldsymbol{r}$とすると、積分$\phi$は$\boldsymbol{r}$の関数とみなせる。そのとき、

$$F_x(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial \phi(\boldsymbol{r})}{\partial x},$$

を示せ。簡単のために、空間を2次元、$\boldsymbol{r} = (x, y)$として良い。

3. 逆に、力の場$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$が、あるスカラー関数$\phi(\boldsymbol{r})$を用いて

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{grad}\,\phi(\boldsymbol{r})$$

で表される場合には、$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$は保存力であることを示せ。

4. 質点に働く力が保存力で$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{grad}\,\phi(\boldsymbol{r})$と表されるとき、質点の運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$$

より、力学的エネルギー保存則を導け。

5. 2次元空間での力の場

$$\boldsymbol{F}_1(x, y) = G\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

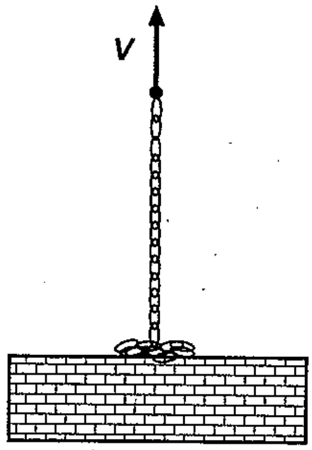
について、以下の問いに答えよ。但しGは正の定数とする。

(a) $x - y$平面に力を表す矢印をいくつか描くことにより、力の場$\boldsymbol{F}_1$の概形を図に示せ。

(b) $\boldsymbol{F}_1$が保存力かどうか理由をつけて判定せよ。

〔I-B〕 単位長さあたりの質量が ρ の鎖が一ヶ所にとぐろを巻いておかれているとする。その一端を鉛直方向に一定の速さ V で引き上げたとする。そのために必要な外力 F は時間とともに変化する。引き上げられた鎖はまっすぐ上に移動するものとして、以下の問いに答えよ。但し、重力の加速度を g とする。

1. 端の高さが ℓ となったときの、鎖の力学的エネルギー $E(\ell)$ を書け。ただし、位置エネルギーは引き上げる前の状態を基準とし、鎖は十分長いとする。
2. 引き上げ始めてから端の高さが ℓ となるまでに、外力がした仕事 $W(\ell)$ を求めよ。
3. $W(\ell)$ と $E(\ell)$ の大きさを比較せよ。その差がどうして生じたか、設問の仮定との関係に注意して説明せよ。



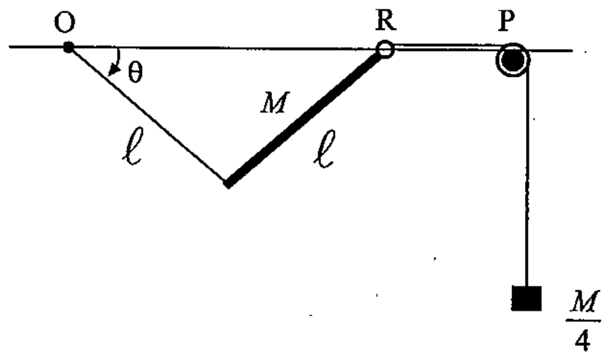
〔I-C〕図のように、長さ ℓ 質量 M の一様な細い棒の一端につながれた長さ ℓ の軽いひもが、まっすぐ水平にはられた針金に点Oで固定されている。棒の他端には小さく軽いリングRが固定されていて、針金を自由に滑るものとする。さらに、リングには、軽いひもが取り付けられており、ひもの他端には軽く摩擦のない滑車Pを通して質量 $M/4$ の重りがぶら下がっている。

棒に取り付けられているひもと針金の間の角度を θ として、以下の問いに答えよ。

ただし、重力の加速度を g とする。また、ひもはたわまないとし、棒は針金を含む鉛直面内、重りは鉛直方向にしか運動しないものとする。

途中の計算で必要な場合には、図中の点Oを原点、x 軸を水平、y 軸を鉛直方向とする座標系を用いて考えよ。

1. この系の運動エネルギー K、位置エネルギー U、およびラグランジアン L を、角度 θ を用いて表せ。ただし、位置エネルギーは $\theta = 0$ を基準とし、棒の重心のまわりの慣性モーメントを I とせよ（以下の問いについても同様）。
2. 釣り合いの角度 θ_0 を求め、その安定性を議論せよ。また、その時の点Oと棒をつなぐひもの張力 T を求めよ。
3. 角度 θ に対する一般化運動量 p_θ を求めよ。
4. 釣り合いの位置 θ_0 のまわりの微小振動の角速度 ω を求めよ。



平成２６年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [II] (125 点) 平成 25 年 8 月 28 日(水) 14:40 - 16:00

注意事項

1. 指示があるまで、この問題冊子を開けないこと。
2. 問題冊子１部、解答冊子１部が配布されていることを確認すること。
3. 解答開始の合図の後、解答を始める前に、問題冊子はこの表紙を含めて計４枚であり、解答用紙が計２枚であることを確認し、すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
4. 問題 [II-1]および[II-2]の解答は、それぞれ別の解答用紙に記入すること。
5. 解答用紙は裏面も使ってよい。裏面を使っても足らない場合には、試験監督に申し出ること。
6. 解答に際しては、特に指定のある場合を除いて、最終的な答のみでなく、その導出過程も説明すること。
7. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [II]

[1] ある種の放射線検出器は、放射線の電離作用によって気体中に生じたイオンや電子を検出する。その検出に関わる以下の問題に答えよ。ただし、空間の誘電率にはすべて真空の誘電率 ε_0 を用いるものとする。

(A) n 個の静止した点電荷の系を考える。i 番目の点電荷を q_i とし、その位置において他の点電荷がつくる電位を V_i とする。ただし、無限遠での電位を0とし、i 番目と j 番目の点電荷間の距離を $r_{ij}(=r_{ji})$ とする。

1) V_i を q_j および r_{ij} $(j \neq i)$ を用いて表せ。

2) 各点電荷の位置はそのままで、すべての電荷を q_i から q_i' に変えた場合の同様の電位を V_i' とする。このとき定理

$$\sum_{i=1}^{n} q_i V_i' = \sum_{i=1}^{n} q_i' V_i \qquad (1)$$

を証明せよ。

(B) 同軸円筒状の導体からなる図 1a のような系を考えよう。内部の導体 (電極 1) の外半径は a、外部の導体 (電極 2) の内半径は b、長さは共に l とする。また、電極 1 の電位 V_1 は電池によって V に固定されており、電極 2 の電位 V_2 は接地されて 0 になっている。

軸からの距離が r $(a < r < b)$ で円筒の端からは十分離れた位置に点 P を考える。

3) 点 P の電位 V_3 を求めよ。

電極 1 の外表面に現れる電荷の総量を q_1、電極 2 の内表面に現れる電荷の総量を q_2 とし、点 P には点電荷 q_3 が置かれているとする (図 1b)。

4) $q_3 = 0$ の場合に、q_1 および q_2 を求めよ。ただし、円筒の端の効果は無視できるものとする。

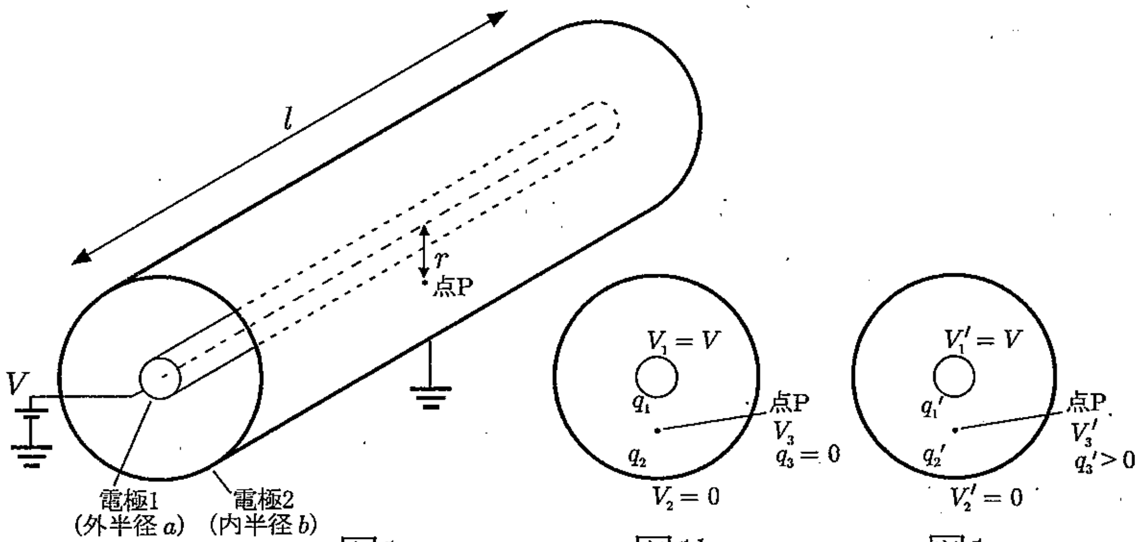


図1a　　図1b　　図1c

次に点電荷とみなせるイオンを点Pに置き(図1c)、その場合の電位と電荷を′(ダッシュ)をつけた記号で表す。すなわち、点Pに置かれたイオンの電荷を q_3' とする。このとき、$V_1' = V$、$V_2' = 0$ はこれまでと変わらないが、q_1'、q_2' は変化する。

5) 式(1)の定理は、図1bと図1cのような、点電荷と導体面上の電荷が混在した系にも適用できる。これをふまえ、q_1' を q_3' と r の関数として求めよ。ただし、導出過程で必要であれば、q_1' と q_2' が点Pにつくる電位を V_3' と表せ。

イオンは気体分子と衝突しながら一定速度 $v = \dfrac{dr}{dt}$ で電極2に向かう。

6) イオンが電極2に到達するまでの間に電池から電極1に流れ込む電流を時刻 t の関数として求めよ。ただし、イオンは $t = 0$ に $r = r_0$ の位置にあったとする。また、イオンの移動により発生する磁場の影響は考えなくてよい。

[2] 電気伝導度 σ の媒質中を伝わる電磁波を考えよう。マクスウェル方程式のうちの２つとして

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu\sigma\boldsymbol{E} + \varepsilon\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{3}$$

を用いることにする。ここで $\sigma\boldsymbol{E}$ は電場による伝導電流を表している。媒質中では電流を担う電子に加えて正イオンがあるため、電荷密度は０であるとして以下の問いに答えよ。ただし、静電磁場は存在しないものとする。また、残り２つのマクスウェル方程式も必要に応じて使用してよい。

1) $\boldsymbol{E}$ がみたす波動方程式

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

をマクスウェル方程式から導け。ただし、ベクトル演算の関係式
$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2\boldsymbol{E}$ を用いてもよい。

図２のように、$z < 0$ の領域は絶縁体である媒質 I、$z \geq 0$ の領域は導体である媒質 II で満たされている場合を考える。媒質 I の電気伝導度は 0、媒質 II の電気伝導度は $\sigma > 0$ であるが、両媒質は同じ誘電率 ε と透磁率 μ をもつものとする。

ここで媒質 I 中で $z = -\infty$ から z 軸正方向に平面電磁波を入射させる。

2) 媒質 I を進む入射波は横波 ($\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ の z 成分が 0) であることを示せ。

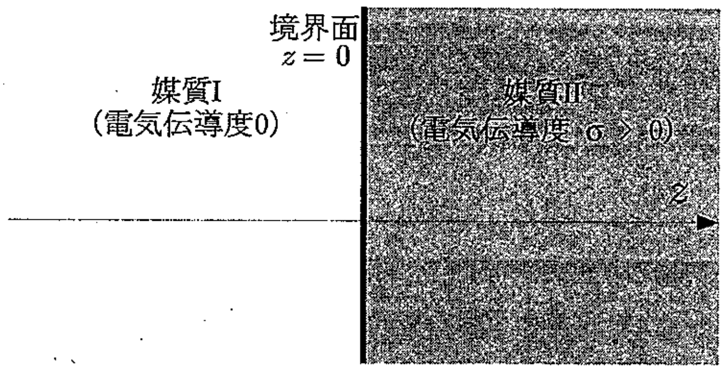


図２

この入射波の電場の x 成分は $E_x = A\cos(kz-\omega t)$、y 成分は $E_y = 0$ であるとする。ただしこれ以降は、計算の便宜上複素表現 $\widehat{E}_x = Ae^{i(kz-\omega t)}$ を用いる。この場合 $\widehat{E}_x$ の実部が現実の電場に対応することになる。

3) k を ε、μ、ω を用いて表せ。

4) 入射波の磁束密度の y 成分の複素表現 $\widehat{B}_y$ を求めよ。

5) 境界面 $z=0$ では z 軸の負の方向に進む反射波が発生する。この反射波の $\widehat{E}_x$ の式を書け。ただし位相を含む複素振幅を R とせよ。

境界面を横切った電磁波は媒質 II を z 軸の正方向に進む。ここで、媒質 II 中では、σ が大きいので方程式 (4) の第２項が第３項に比べて無視できるものとする。この媒質 II を進む電磁波について、$\widehat{E}_x = Te^{-\alpha z}e^{i(\beta z-\omega t)}$ の形の解を考えよう (T は複素振幅、α、β は実数)。

6) α と β を求めよ。ただし z 軸の正方向に進む電磁波に対応する解を選べ。

7) 境界面を透過した電磁波によって媒質 II 中でジュール熱が生じる。単位入射面積あたりのジュール熱の時間平均 J を、透過波の振幅 $|T|$ を用いて表せ。ただし、実際の電場は複素表現の実部 $E_x = |T|e^{-\alpha z}\cos(\beta z-\omega t+\phi)$ であることに注意せよ (ϕ は T の偏角を表す)。

8) 複素振幅 R および T は $z=0$ における境界条件により決まる。R と T の決定に必要な境界条件をすべて挙げよ。

9) 境界面を透過した電磁波の $z=0$ における $\dfrac{1}{\mu}E_xB_y$ の時間平均は、問 7) の J と一致する。その理由を説明せよ。

平成２６年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [III] (125 点) 平成 25 年 8 月 28 日(水) 16:20 − 17:40

注意事項

1. 指示があるまで、この問題冊子を開けないこと。
2. 問題冊子１部、解答冊子１部が配布されていることを確認すること。
3. 解答開始の合図の後、解答を始める前に、問題冊子はこの表紙を含めて計３枚であり、解答用紙が計２枚であることを確認し、すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
4. 問題 [III-A]と[III-B]および[III-C]と[III-D]の解答は、それぞれの解答用紙に記入すること。
5. 解答用紙は裏面も使ってよい。裏面を使っても足らない場合には、試験監督に申し出ること。
6. 解答に際しては、特に指定のある場合を除いて、最終的な答のみでなく、その導出過程も説明すること。
7. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [III]

以下では、m は粒子の質量、$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものとする。

[A] 1次元座標 x 上を、実関数のポテンシャル $V(x)$ の下に運動する1粒子を量子力学的に考察する。波動関数を $\psi(x,t)$ として、以下の問題に答えよ。

(A1) シュレディンガー方程式を用いて、次の等式

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x,t)}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

を示せ。ここで、$\rho(x,t)$ と $j(x,t)$ は次のように定義される:

$$\rho(x,t) \equiv |\psi(x,t)|^2, \qquad j(x,t) \equiv \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*(x,t)\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*(x,t)}{\partial x}\psi(x,t)\right] \tag{2}$$

(A2) 上の $\rho(x,t)$ は確率密度を表す。すなわち、微小な区間 $(x, x+dx)$ に粒子を見出す確率が $\rho(x,t)dx$ で与えられる。式 (1) を座標 x に関して有限区間 (a,b) で積分することによって、この式の意味するところを説明せよ。また、$j(x,t)$ がどのような物理量を表すか答えよ。

[B] 問題 [A] と同様な1次元座標 x 上の1粒子の量子力学に関する以下の問題に答えよ。ただし、ポテンシャルは次のように与えられるものとする:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ -V_0, & x > 0 \end{cases} \qquad (V_0 > 0) \tag{3}$$

(B1) 今、$x < 0$ の領域から、粒子が一定のエネルギー E で入射したとする時、波動関数 $\psi(x,t)$ はどのように表されるか、$x \le 0$ と $x > 0$ の領域に分けて答えよ。ただし、入射波の波動関数の確率密度が1になるように規格化するものとし、透過波の係数を T、反射波の係数を R とせよ。

(B2) $x = 0$ での境界条件により、問 (B1) で導入された2つの未定定数 T と R を求め、それらを E と V_0 を用いて表せ。

(B3) 入射波、透過波、反射波それぞれの $j(x,t)$(式 (2) 参照) を計算することにより、透過率と反射率とがそれぞれ

$$\frac{4\sqrt{E+V_0}\sqrt{E}}{(\sqrt{E+V_0}+\sqrt{E})^2}, \qquad \left(\frac{\sqrt{E+V_0}-\sqrt{E}}{\sqrt{E+V_0}+\sqrt{E}}\right)^2 \tag{4}$$

となることを示せ。

[C] 陽子はスピンという内部状態を持つ。これは軌道角運動量の固有状態と同じ性質を持つが、その大きさは $s = \hbar/2$ である。量子化軸を z 軸に取ると、角運動量演算子の一般論により、z 軸方向のスピン演算子 s_z は固有値 $\pm\hbar/2$ を持つ。この 2 つの固有値 $+\hbar/2$ と $-\hbar/2$ に対応する固有状態を上向きスピン状態と下向きスピン状態といい、それぞれを

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (上向き)}, \qquad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (下向き)}, \tag{5}$$

と 2 次元ベクトルで表すと、z 方向と x 方向のスピン演算子 s_z と s_x は

$$s_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad s_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

と 2×2 行列で表される。以下の問題に答えよ。

(C1) スピン角運動量演算子の交換関係を用いて、y 方向のスピン行列 s_y を求めよ。

(C2) 演算子 $s_\pm \equiv s_x \pm i s_y$ を考える。これらを $\chi_\pm$ に作用させた $s_+\chi_\pm$ 及び $s_-\chi_\pm$ を計算することにより、演算子 $s_\pm$ がどのような意味を持つか答えよ。

(C3) x 軸方向のスピンを観測しても、その固有値は $+\hbar/2$ と $-\hbar/2$ なることを示し、その規格化された固有状態それぞれを χ_+ と χ_- の線型結合で表せ。

[D] 陽子のようにスピン $\hbar/2$ を持つ粒子が、問題 [B] のポテンシャル (式 (3) 参照) の下に、x 座標上を運動している。さらに、$x > 0$ の領域には z 軸方向に大きさ B の磁場が存在している。ここで、磁場とスピンとの相互作用ハミルトニアン H_1 は

$$H_1 = -\frac{2}{\hbar}\gamma B\, s_z \qquad (x > 0) \tag{7}$$

と与えられる。ただし、γ は正の実数 ($\gamma > 0$)、s_z は問題 [C] で考えたスピン行列 (式 (6) 参照) である。今、空間運動は x 軸方向のみであるとし、この粒子のスピン状態を含んだ波動関数を

$$\psi(x,t) = \psi_+(x,t)\chi_+ + \psi_-(x,t)\chi_- \tag{8}$$

と表す。ただし、$\chi_\pm$ は問題 [C] で考えた、z 軸方向のスピン固有状態 (式 (5) 参照) である。以下の問題に答えよ。ただし、必要に応じて問題 [B] と [C] の結果を自由に用いてよい。

(D1) $x > 0$ の領域で、 $\psi_+(x,t)$ 及び $\psi_-(x,t)$ の満たすべき方程式を書け。

(D2) z 軸に対し上向きスピンを持った粒子が、$x < 0$ の領域から一定のエネルギー E で入射した時の反射率を求めよ。次に、同様にして z 軸に対し下向きスピンを持った粒子が入射した時の反射率を求め、z 軸に対し上下どちら向きのスピンを持った粒子の反射率がより大きいか答えよ。ただし、入射エネルギー E は V_0 及び γB は比べて十分に大きく、答えは V_0/E 及び $\gamma B/E$ の最低次の範囲内で求めること。

(D3) 次に、問 (C3) で考えた x 軸方向にスピンの固有値 $+\hbar/2$ を持った粒子が、$x < 0$ の領域から一定のエネルギー E で入射した時を考える。まず、入射波がどのように表されるかを答えよ。次に、反射波がどのように表されるかを考えることにより、反射してきた粒子のスピンが反転する確率を求めよ。ただし、問 (D2) と同様に入射エネルギー E は V_0 及び γB に比べて十分大きいとせよ。

平成２６年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [IV] (125点)　平成25年8月29日(木)　9:00 — 10:20

注意事項

1. 指示があるまで、この問題冊子を開けないこと。

2. 問題冊子１部、解答冊子１部が配布されていることを確認すること。

3. 解答開始の合図の後、解答を始める前に、問題冊子はこの表紙を含めて計３枚であり、解答用紙が計３枚であることを確認し、すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

4. 問題 [A]、[B]、[C]の解答は、それぞれ別の解答用紙に記入すること。

5. 解答用紙は裏面も使ってよい。裏面を使っても足らない場合には、試験監督に申し出ること。

6. 解答に際しては、特に指定のある場合を除いて、最終的な答のみでなく、その導出過程も説明すること。

7. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [IV]

ボルツマン定数を k_B、プランク定数を h とする。

N 個の 1 種類の古典粒子系が 1 次元空間にあり、ハミルトニアンが

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^{N-1} v(x_{i+1} - x_i) + \phi(x_N) \tag{1}$$

で与えられている。ただし、m は粒子の質量、p_i と x_i は i 番目の粒子の運動量と位置を表す。$v(x_{i+1} - x_i)$ は隣り合う粒子間の相互作用、$\phi(x_N)$ は N 番目の粒子にかかるポテンシャルを表す。

この系が温度 T の熱浴に接して熱平衡にある時、カノニカル分布を使って次の問いに答えなさい。ただし、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{2}$$

を使っても良い。また、N は充分大きいとして、スターリングの公式

$$\ln N! \approx N \ln(N/e) \tag{3}$$

が成り立つとする。

[A] 位置 $x = 0$ と $x = L$ に壁があり、すべての粒子が $0 < x_i < L$ に閉じ込められている場合を考える。さらに、$v(x) = \phi(x_N) = 0$ とする。

1. 分配関数 Z を求めなさい。

2. ヘルムホルツの自由エネルギー F を求めなさい。ただし、(3) 式を使いなさい。

3. エントロピー S を求めなさい。

4. 内部エネルギー E を求めなさい。

5. 化学ポテンシャル μ を求めなさい。

[B] 次に、$x = 0$ の壁はそのままにして、$x = L$ の壁を取り去り、$v(x)$ と $\phi(x_N)$ が次のように与えられる場合を考える。

$$v(x) = \begin{cases} \infty & |x| < d \\ 0 & |x| \geq d \end{cases} \tag{4}$$

$$\phi(x_N) = f x_N \tag{5}$$

ここで、$d > 0$、$f > 0$ とする。すべての粒子は $0 < x_i < \infty$ にあり、粒子の番号は $x = 0$ の壁に近い方から順に $1, 2, \ldots, N$ となっている。

6. 分配関数 Z を求めなさい。ただし、$x_2, \ldots, x_N$ を $y_i = x_{i+1} - x_i$ $(i = 1, \ldots, N-1)$ に変数変換して解きなさい。また、問 1. の結果を使っても良い。

7. ヘルムホルツの自由エネルギー F を求めなさい。

8. エントロピー S が

$$S = S_0 + aNk_{\mathrm{B}} \ln(k_{\mathrm{B}}T) - bNk_{\mathrm{B}} \ln f \tag{6}$$

と表される時、a と b を求めなさい。ただし、S_0 は T にも f にもよらない項である。

9. x_N の平均 $\langle x_N \rangle$ を求めなさい。

10. $x_1 = x$ である確率分布 $P(x)$ を求めなさい。

[C] 最後に、系全体を温度 T の熱浴から切り離して、断熱過程を考える。ただし、熱力学関数は、前問で求めたカノニカル分布と同じ関数形を持つ。

11. f を準静的に $f'(>0)$ にした時、温度 T は T' になった。T' を求めなさい。ただし、(6) 式の a と b を使っても良い。

12. f を、準静的ではなく急激に大きくした時、温度 T は上がるか下がるかを答えなさい。その理由も説明しなさい。ここで、(6) 式の a と b は正となる事を使っても良い。