平成２４年度
物理学専攻 大学院修士課程
入学試験問題

物理学〔I〕（１２５点）

平成２３年8月３１日（水）１３：００－１４：２０

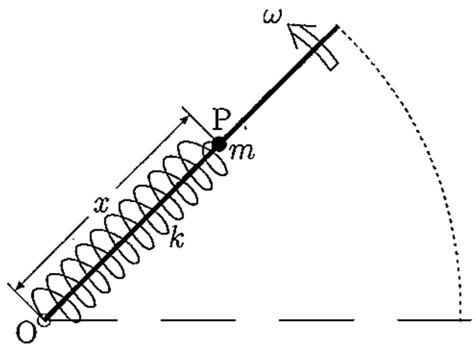
注意事項

1. 指示があるまでは、問題冊子ならびに解答冊子を開かないこと。
2. 問題冊子１部、解答冊子１部が配布されていることを確認すること。
3. 「はじめ」の指示があったら、解答を始める前に、まず問題冊子に表紙１枚と問題用紙が２枚、解答用紙が２枚あることを確認し、すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
4. 問題〔I－A〕および〔I－B〕の解答は、それぞれ指定の解答用紙に記入すること。
5. 解答に際しては、最終的な答だけでなくその答に到る道筋も丁寧に記入すること。
6. 解答用紙は裏面も使ってよい。それでも足りない場合は、試験監督に申し出ること。
7. 「おわり」の指示があったら、直ちに鉛筆を置くこと。
8. 試験終了後、解答冊子は回収するが、問題冊子は持ち帰って良い。

物理学 [I]

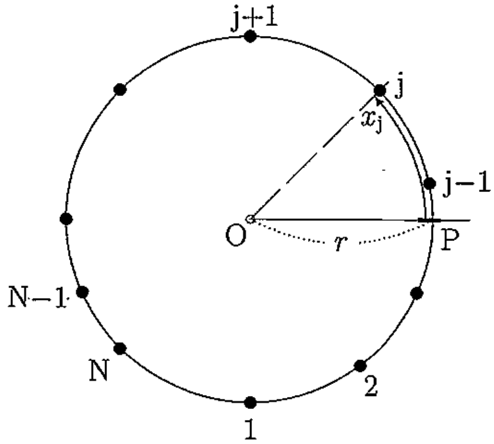
以下の問に、答えの導出過程も含めて解答せよ。なお、物理量 X の時間微分は $\dot{X}$ と記す。

[I-A] 図に示すように、水平面上に置かれた十分に長い直線の棒が、一方の端が点Oに固定されて、Oを中心に一定の角速度 ω で回転している。棒には、質量 m の質点Pが取付けられており、棒にそって摩擦なく滑らかに動くことができる。点Oと質点Pの間は、棒にそって伸び縮みするバネでつながれている。バネは自然長が l、バネ定数は k で、質量は無視できるとする。点Oから質点Pまでの距離を x とする。



(A-1) バネのポテンシャルエネルギー U を、バネが自然長のときに $U=0$ として求めよ。
(A-2) 点Oを原点とする慣性系から見たときの、質点Pの運動エネルギー T を求めよ。
(A-3) 質点とバネで構成された力学系のラグランジアン L を求めよ。
(A-4) x についてのオイラー・ラグランジュ方程式を求めよ。
(A-5) 慣性系から見ると、棒は質点に外力をおよぼして仕事をしているので、質点とバネの系のエネルギー $E=T+U$ は保存しない。距離 x が $\dot{x}>0$ で変化しているとき、質点が棒から受ける力の大きさ F およびその向きを求めよ。
(A-6) (A-3) で求めたラグランジアンの特徴からすぐにわかる保存量がある。保存する理由を述べて、その保存量を書き下せ。

[I-B] 図に示すように、水平面内に置かれた半径 r の円の円周上を、質量 m の N 個の質点 $\mathrm{j}=1,2,\cdots,\mathrm{N}$ が、摩擦なく滑らかに動くことができる。各質点 j の位置を、円周上の基準点 P から質点まで円周にそって反時計回りに計った距離 x_{j} で表わす。



それぞれの質点 j は、質点 j + 1 と質点 j − 1 の円周にそった速度の差に比例した力を受ける。その比例定数を a とおき、運動方程式を

$$m\ddot{x}_{\mathrm{j}}=a(\dot{x}_{\mathrm{j+1}}-\dot{x}_{\mathrm{j-1}}) \qquad \mathrm{j}=1,2,\cdots,\mathrm{N} \tag{1}$$

とする。ここに $x_{\mathrm{N+1}}\equiv x_1$, $x_0\equiv x_{\mathrm{N}}$ である。質点の運動は、円周上で互いに衝突しない範囲内におさまっているとする。以下で i は虚数単位である。

(B-1) 円の中心 O のまわりの全角運動量

$$l=mr\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{N}}\dot{x}_{\mathrm{j}} \tag{2}$$

が時刻 t によらない保存量であることを示せ。

(B-2) 全運動エネルギー

$$T=\frac{1}{2}m\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{N}}\dot{x}_{\mathrm{j}}^2 \tag{3}$$

が時刻 t によらない保存量であることを示せ。

(B-3) 質点の総数を $N=3$ とする。3 成分のベクトル $\mathbf{v}$ を

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix} \tag{4}$$

で定義し、運動方程式 (1) を 3 行 3 列の行列 A をもちいて

$$m\dot{\mathbf{v}}=A\mathbf{v} \tag{5}$$

と書く。行列 A は反対称行列である。その具体的な形を求めよ。

(B-4) $2\pi/3$ の位相をもった因子 $\epsilon = e^{i2\pi/3}$ によって 3 個のベクトル $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ を

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon \\ \epsilon^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon^2 \\ \epsilon \end{pmatrix} \tag{6}$$

と定義する。等式 $\epsilon^* = \epsilon^2$, $\epsilon^3 = 1$, $1+\epsilon+\epsilon^2 = 0$ により、これらは $\mathbf{u}_j^\dagger \mathbf{u}_k = \delta_{jk}$ $(j, k = 1, 2, 3)$ を満たす規格直交ベクトルである。これらのベクトルはエルミート行列 iA の固有ベクトル

$$iA\mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{u}_j \qquad j = 1, 2, 3 \tag{7}$$

になっている。固有値 λ_j $(j = 1, 2, 3)$ を求め、それぞれの値を $0, \pm a, \pm\sqrt{2}a, \pm\sqrt{3}a$, $\pm 2a$ の中から選んで答えよ。

(B-5) 行列 iA をユニタリー変換 $U^\dagger iAU$ で対角化するユニタリー行列 U を具体的に書き下せ。

(B-6) 3 成分の複素ベクトル $\mathbf{w}$ を $\mathbf{w} = U^\dagger \mathbf{v}$ で定義する。時刻 t における $\mathbf{w}$ の各成分 $w_1(t)$, $w_2(t)$, $w_3(t)$ を、$t = 0$ における初期値 $w_1(0)$, $w_2(0)$, $w_3(0)$ のもとに求めよ。

(B-7) 時刻 $t = 0$ における各質点の初速度を

$$\mathbf{v}(t=0) = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

とする。時刻 t における質点 1 の速度 $\dot{x}_1(t)$ を求めよ。

(B-8) 質点の総数 N が偶数のときには、1 個の質点だけに 0 でない初速度 v を与えると、$|v|$ がいかに小さくてもいずれ質点の衝突が起こる。その理由を答えよ。

平成２４年度
物理学専攻 大学院修士課程
入学試験問題

物理学〔II〕（１２５点）

平成２３年8月３１日（水）１４：５０－１６：１０

注意事項

1. 指示があるまでは、問題冊子ならびに解答冊子を開かないこと。
2. 問題冊子１部、解答冊子１部が配布されていることを確認すること。
3. 「はじめ」の指示があったら、解答を始める前に、まず問題冊子に表紙１枚と問題用紙が３枚、解答用紙が２枚あることを確認し、すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
4. 問題〔II－A〕、〔II－B〕および〔II－C〕の解答は、それぞれ所定の解答欄に記入すること。
5. 解答に際しては、最終的な答だけでなくその答に到る道筋も丁寧に記入すること。
6. 「おわり」の指示があったら、直ちに鉛筆を置くこと。
7. 試験終了後、解答冊子は回収するが、問題冊子は持ち帰って良い。

物理学 [II]

※ 太い文字($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{A}$ 等)はベクトルを表す。

※ 単位系は特に指定しない限りMKSA(SI)を用いる。cgsで解答してもよいがその場合は、解答欄のそれぞれにcgsと明示しなさい。

※ ε_0は真空の誘電率, μ_0は真空の透磁率, Δはラプラシアンを表す。

[II-A] 真空中を伝播する電磁波を考える。電場 $\boldsymbol{E}$ が直交座標系(x, y, z)で、$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos(kz-\omega t)$ ($\boldsymbol{E}_0$は実定数ベクトル, tは時刻, $k > 0$, $\omega > 0$) で与えられる時、以下の問いに答えなさい。但し、磁束密度を$\boldsymbol{B}$とし、定常磁場はないものとする。

(1) この波はどちらの方向に進むか。

(2) 真空中の電場に関するガウスの法則を微分形で書きなさい。

(3) 問(2)を用いて、$\boldsymbol{E}_0$がxy平面内になければならないことを示しなさい。

(4) 電磁誘導に対するマクスウェルの方程式を書きなさい。

(5) 問(4)を用いて、磁束密度$\boldsymbol{B}$が電場$\boldsymbol{E}$と電磁波の進行方向の両方に垂直であることを示しなさい。

(6) ポインティングベクトルの定義式を書きなさい。また、それは何を表しているか答えなさい。

(7) 問(6) を用いて、この電磁波に対するポインティングベクトルの方向を求めなさい。

[II-B] 太さが無視できる直線状の電線を流れる電流が作る磁場について、以下の問いに答えなさい。

(1) アンペールの法則の積分形を書き、その意味を説明しなさい。

(2) 図１a のような直交座標系の y 軸上に、無限に長い直線状の電線がある。その電線を、定常電流 I が y 軸の正の向きに流れている。アンペールの法則を用いて、この電流が点 $(b, 0, 0)$　$(b > 0)$に作る磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の z 成分を求めなさい。

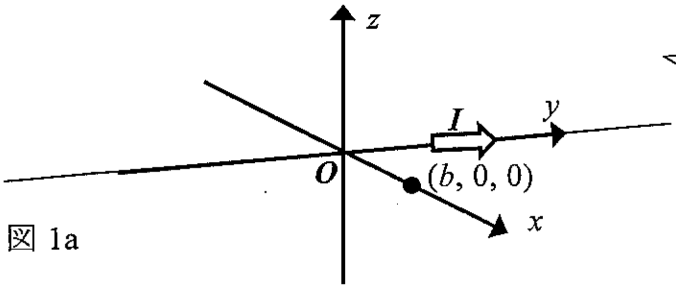


図 1a

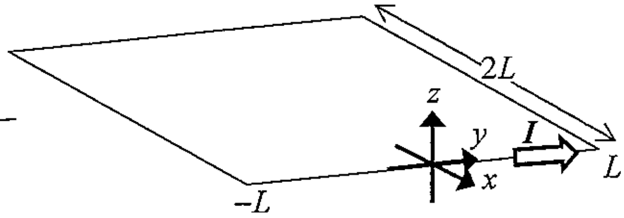


図 1b

問(2)の結果を、ベクトルポテンシャルを使って、以下のように導出しよう。

真空中を流れる定常電流が作るベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は、$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$ のゲージの場合 $\Delta \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{j}$　($\boldsymbol{j}$: 電流密度)を満たし、$\boldsymbol{j}$ が無限遠でゼロの場合には、解は、

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dx'dy'dz'\,\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \qquad \text{(E1)}$$

で与えられる。但し、$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$,　$\boldsymbol{r}' = (x', y', z')$とする。

無限に長い定常電流の代わりに、一辺 $2L$ の大きな正方形の閉回路を考えると(図１b)、式(E1)を用いることができる。この回路の一辺が y 軸上$-L$ から L にあるとして、以下に答えなさい。

(3) 一般の場合について、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の関係を書きなさい。

(4) 図１b の y 軸上の電流は、$\boldsymbol{j} = I\,\delta(x)\delta(z)\,\hat{\boldsymbol{y}}$ $(-L \le y \le L)$と表わされる。ここで、$\delta(x)$と$\delta(z)$はデルタ関数、$\hat{\boldsymbol{y}}$ は y 方向の単位ベクトルである。これを用いて、y 軸上の定常電流が作るベクトルポテンシャルの表式を導きなさい（y 方向の積分の計算はしなくてよい）。

(5) $b \ll L$ の時、y 軸上以外の電流が$(b, 0, 0)$に作る磁場は無視できる。このことから、問(4)の結果を用いて、この定常電流が $(b, 0, 0)$に作る $\boldsymbol{B}$ の各成分を求めなさい。但し、$L\to\infty$として積分を実行しなさい。

[II-C] 図２のように直交座標系をとる。但し、y 軸は紙面に垂直方向である。１辺 a の正方形の薄い金属板２枚を、$z=0$ 及び $z=d$ に、xy 平面に平行に配置し、平行平板コンデンサーを作る。金属板の間($z=\delta$から $z=d-\delta$ (但し $\delta \ll d$))に比誘電率 ε_r ($\varepsilon_r > 1$)の誘電体を挿入し、$z=d$ の電極に電荷 Q を、$z=0$ の電極に電荷 $-Q$ を与えた。

(a) 及び(b)それぞれの場合について、以下の問いに答えなさい。

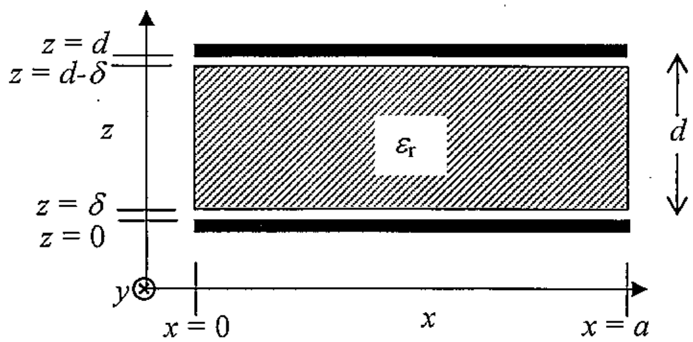


図２

(a) まず、$d \ll a$ として、端の効果が無視できるとする。この場合、電場は z 成分のみとしてよい。

(1) 電束密度 $\boldsymbol{D}$ に関するガウスの法則を積分形で書きなさい。なお、必要な記号は定義しなさい。

(2) コンデンサーの外側 $z<0$ と $z>d$ で、電場の値はいくらか。 理由も答えなさい。

(3) 電束密度に関するガウスの法則を用いて、誘電体内の電場を導出しなさい。

上で求めたように、コンデンサー内の電場は、誘電体がない場合に比べて小さくなる。この原因を理解するために、誘電体の分極 $\boldsymbol{P}$ により生じた電荷を求めてみよう。尚、分極率は比誘電率を用いて $\varepsilon_r - 1$ と与えられる。

(4) 分極 $\boldsymbol{P}$ の z 成分 P_z の z 軸に沿った変化を、解答欄のグラフに記入しなさい。 適切な z 座標値を書き、誘電体内の電場 E を用いて縦軸に P_z の値を書き入れること。

(5) この系では電荷がどのように分布しているだろうか。電荷が存在する位置の z 座標とその面電荷密度の値を、符号を含めて全て答えなさい。但し、誘電体内の電場の大きさを E とする。

(b) 次に、d が a に比べ小さくない場合を考え、端の効果を考慮する。簡単のために、誘電体の影響は無視しなさい。

(1) 電気力線の分布を図示し、それが $d \ll a$ の場合と比べてどう変わるか説明しなさい。

(2) 問(b)(1)の結果を基に、端の効果が、電極($z=d$)上の電荷密度の分布にどのような影響を与えるか。定性的に説明しなさい。

平成２４年度
物理学専攻 大学院修士課程
入学試験問題

物理学〔III〕（１２５点）

平成２３年8月３１日（水）１６：４０－１８：００

注意事項

1. 指示があるまでは、問題冊子ならびに解答冊子を開かないこと。
2. 問題冊子１部、解答冊子１部が配布されていることを確認すること。
3. 「はじめ」の指示があったら、解答を始める前に、まず問題冊子に表紙１枚と問題用紙が２枚、解答用紙が２枚あることを確認し、すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
4. 問題〔III－A〕および〔III－B〕の解答は、それぞれ指定の解答用紙に記入すること。
5. 解答に際しては、最終的な答だけでなくその答に到る道筋も丁寧に記入すること。
6. 解答用紙は裏面も使ってよい。それでも足りない場合は、試験監督に申し出ること。
7. 「おわり」の指示があったら、直ちに鉛筆を置くこと。
8. 試験終了後、解答冊子は回収するが、問題冊子は持ち帰って良い。

物理学 [III]

以下の問題で、$\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割ったもの、i は虚数単位とする。

[III-A] 1次元ポテンシャル $U(x)$ に束縛された質量 m の粒子の定常状態を考える。粒子の波動関数 $\psi(x)$ が満たすシュレディンガー方程式は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+U(x)\right)\psi(x)=E\psi(x)$$

である。ここで、x は粒子の位置座標であり、E はエネルギー固有値 $(E<0)$ である。いま、ポテンシャル $U(x)$ は

$$U(x)=\begin{cases}+\infty & x<0\text{ のとき}\\ -V & 0\le x<a\text{ のとき }(V>0,\,a>0)\\ 0 & x\ge a\text{ のとき}\end{cases}$$

であるとする。以下の問に答えよ。ただし、**問 8** を除きエネルギー固有値 E を求める必要はなく、解答には E を用いてよい。

問 1. $x=0$ での境界条件を考慮し、$0<x<a$ での波動関数 $\psi(x)$ を求めよ。ただし、$\psi(x)$ を規格化する必要はなく、適当な未知係数を用いてよい。

問 2. $x=+\infty$ での境界条件を考慮し、$x>a$ での波動関数 $\psi(x)$ を求めよ。ただし、$\psi(x)$ を規格化する必要はなく、適当な未知係数を用いてよい。

問 3. $x=a$ で $\psi(x)$ が満たすべき条件を答えよ。

問 4. 基底状態が束縛状態のとき、その波動関数 $\psi(x)$ の概略を描け。

問 5. 第一励起状態が束縛状態のとき、その波動関数 $\psi(x)$ の概略を描け。

問 6. $k=\dfrac{\sqrt{2m(V+E)}}{\hbar}$、$\kappa=\dfrac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$ とすると、**問 3** から $\kappa=-k\cot(ka)$ となる。このことを示せ。

問 7. 束縛状態が1つだけのときの V の条件を求めよ。

問 8. **問 7** で求めた V の下限値を V_0 とおく。V が V_0 よりわずかに大きく

$$V=V_0(1+\varepsilon)$$

の場合を考える。ここで ε は正で、$\varepsilon\ll 1$ である。このときの基底状態の E は近似的に

$$E=-\alpha V_0\varepsilon^2$$

で与えられる。係数 α を求めよ。

[III-B] 電子はスピン角運動量 (以下スピン) という内部状態を持つ。ここでは電子の量子状態のうち、スピン状態のみを考え、空間部分は考えないこととする。

電子のスピンの大きさは $s=\dfrac{\hbar}{2}$ である。量子化軸を z 軸にとると、スピン演算子の z 成分 $\hat{s}_z$ は 2 行 2 列の行列

$$\hat{s}_z=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

で与えられ、その固有値 s_z は $s_z=\pm\dfrac{\hbar}{2}$ という 2 つの値をとる。$s_z=+\dfrac{\hbar}{2}$ の固有ベクトルを α、$s_z=-\dfrac{\hbar}{2}$ の固有ベクトルを β とすると、α と β は列ベクトルで

$$\alpha=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

と表現でき、$\alpha^\dagger$ と $\beta^\dagger$ は行ベクトルで

$$\alpha^\dagger=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix},\quad \beta^\dagger=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$$

と書ける。また、スピン演算子の x 成分 $\hat{s}_x$ と y 成分 $\hat{s}_y$ は 2 行 2 列の行列

$$\hat{s}_x=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \hat{s}_y=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

で与えられる。

以下の問に答えよ。

問 1. スピン演算子が軌道角運動量演算子と同じ交換関係

$$[\hat{s}_x,\hat{s}_y]=i\hbar\hat{s}_z$$

を満たすことを示せ。

次に、磁場 $\boldsymbol{B}=(B_x,B_y,B_z)$ 中の電子について考える。磁場中の電子のハミルトニアン $\hat{H}$ は

$$\hat{H}=-\mu(B_x\hat{s}_x+B_y\hat{s}_y+B_z\hat{s}_z)$$

で与えられるものとする。ただし、μ は実数である。

まず、z 軸方向の一様定常磁場 $\boldsymbol{B}=(0,0,B_0)$ の場合を考える。

問 2. ハミルトニアン $\hat{H}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

更に、xy 平面内で振動する磁場を加え

$$\boldsymbol{B} = (b\cos(\omega t), -b\sin(\omega t), B_0)$$

とした場合を考える。ここで、t は時刻、b は振動磁場の振幅、ω は振動の角振動数である。

問 3. ハミルトニアン $\hat{H}$ を 2 行 2 列の行列として具体的に表せ。

問 4. 時刻 t における電子スピンの状態ベクトル $\psi(t)$ を

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

と表す。時間に依存するシュレディンガー方程式から、$x(t)$ と $y(t)$ が満たす連立微分方程式を求めよ。

問 5. **問 4** で求めた連立微分方程式の解として

$$x(t) = Ce^{i\omega t/2}e^{i\omega' t/2}, \quad y(t) = De^{-i\omega t/2}e^{i\omega' t/2}$$

の形を仮定する。ここで C、D、ω' は定数である。C と D が関係式

$$\begin{aligned} (-\omega - \omega' + \mu B_0)C + (\mu b)D &= 0 \\ (\mu b)C + (\omega - \omega' - \mu B_0)D &= 0 \end{aligned}$$

を満たさなければならないことを示せ。

問 6. **問 5.** で導いた関係式が非自明な解を持つためには、ω' が

$$\omega' = \pm\Omega, \quad \Omega = \sqrt{(\omega - \mu B_0)^2 + (\mu b)^2}$$

でなければならないことを示せ。

問 7. **問 4** で求めた連立微分方程式の一般解を求めよ。ただし、状態ベクトルを規格化する必要はなく、解答には Ω を用いてよい。また、初期条件から定まる未定定数は適当に定義せよ。

問 8. 初期条件として

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0$$

の場合を考える。$y(t)$ を求めよ。ただし、解答には Ω を用いてよい。

平成２４年度
物理学専攻 大学院修士課程
入学試験問題

物理学〔IV〕（１２５点）

平成２３年９月１日（木）９：００－１０：２０

注意事項

1. 指示があるまでは、問題冊子ならびに解答冊子を開かないこと。
2. 問題冊子１部、解答冊子１部が配布されていることを確認すること。
3. 「はじめ」の指示があったら、解答を始める前に、まず問題冊子に表紙１枚と問題用紙が３枚、解答用紙が３枚あることを確認し、すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
4. 問題〔IV－A〕、〔IV－B〕および〔IV－C〕の解答は、それぞれ指定の解答用紙に記入すること。
5. 解答に際しては、最終的な答だけでなくその答に到る道筋も丁寧に記入すること。
6. 解答用紙は裏面も使ってよい。それでも足りない場合は、試験監督に申し出ること。
7. 「おわり」の指示があったら、直ちに鉛筆を置くこと。
8. 試験終了後、解答冊子は回収するが、問題冊子は持ち帰って良い。

物理学 [IV]

以下において、ボルツマン定数を k_{B}、プランク定数を h とする。また、$\hbar = h/2\pi$ とする。

[IV − A]　系の温度 T、体積 V、粒子数 N を準静的に変化させる。系の内部エネルギーを E、エントロピーを S、圧力を p、化学ポテンシャルを μ として、以下の問に答えよ。

(1) 準静的な微小変化では、$\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N$ が成り立つ。この式の右辺各項の意味を説明し、式全体の意味を述べよ。ここに、$\mathrm{d}X$ は X の微小変化を表すものとする。

(2) 自由エネルギー F をルジャンドル変換 $F = E - TS$ によって導入する。$\mathrm{d}E$ が前問のように与えられるとき、$\mathrm{d}F$ を求めよ。

(3) 前問の結果をもとに、エントロピー S、圧力 p、化学ポテンシャル μ をそれぞれ F の偏微分で表せ。

[IV − B] 温度 T の熱浴に接して熱平衡にある系を考える。

(1) 系が 2 つの状態のみをとるとし、それらの状態のエネルギー E の値を $+\varepsilon$ と $-\varepsilon$ とする。ここに、ε は正の定数である。$+\varepsilon$ の状態をとる確率を p_+、$-\varepsilon$ の状態をとる確率を p_- として（$p_+ + p_- = 1$）、この確率による物理量 Q の期待値を $\langle Q \rangle$ と書くことにする。このとき、以下の問に答えよ。

(1a) p_+ と p_- を $\varepsilon, T, k_{\mathrm{B}}$ を用いて表せ。

(1b) $\langle E \rangle$ を p_+, p_-, ε を用いて表せ。

(1c) $T \to 0$ および $T \to \infty$ での $\langle E \rangle$ はそれぞれいくらになるか。

(1d) $(\Delta E)^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$ として、$(\Delta E)^2$ と比熱 C の関係を求めよ。ただし、$C = \dfrac{\mathrm{d}\langle E \rangle}{\mathrm{d}T}$ である。

(1e) 自由エネルギー F を求めよ。

(1f) 前問の結果を用いて、エントロピー S を求めよ。

(1g) $T \to 0$ および $T \to \infty$ での S はそれぞれいくらになるか。

(1h) エントロピーが p_+, p_- を用いて、$S = -k_{\mathrm{B}}(p_+ \log_e p_+ + p_- \log_e p_-)$ と表されることを示せ。

(2) 系のとりうる状態が $1, 2, 3, \cdots$ と番号付けできるとし、それらの状態のエネルギーの値を順に $E_1, E_2, E_3, \cdots$ とする。n 番目 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の状態をとる確率を p_n としたとき、エントロピー S は、前問 (1h) のように $S = -k_{\mathrm{B}} \displaystyle\sum_n p_n \log_e p_n$ で与えられるとする。系のエネルギーを E として、$\displaystyle\sum_n p_n E_n = E$ および $\displaystyle\sum_n p_n = 1$ という条件のもとで、このエントロピー S が極大になるように p_n を決める。

(2a) ラグランジュの未定乗数法を用いて、p_n が $p_n = A \exp(-\beta E_n)$ の形に書けることを示せ。

以下では、$p_n = A \exp(-\beta E_n)$ とする。

(2b) S を $k_{\mathrm{B}}, A, \beta, E$ を用いて表せ。

以下で、A と β の値を決める。

(2c) 条件 $\displaystyle\sum_n p_n = 1$ から、A と β の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2d) 条件 $\displaystyle\sum_n p_n E_n = E$ と前問で求めた関係式から、$\dfrac{\mathrm{d} \log_e A}{\mathrm{d}\beta} = E$ であることを示せ。

(2e) 熱力学関係式 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}E} = \dfrac{1}{T}$ を用いて β を T で表せ。

[IV − C]　1辺の長さが L の立方体の空間中にあるボース粒子系を考える。以下では、粒子間の相互作用については考えない。系の外側は物質で満たされており、系は温度が T、化学ポテンシャルが μ の熱平衡状態にあるとする。

(1) 1粒子状態が $1, 2, 3, \cdots$ と番号付けできるとし、それらの状態のエネルギーの値を順に $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots$ $(0 \leqq \varepsilon_1 \leqq \varepsilon_2 \leqq \varepsilon_3 \leqq \cdots)$ とする。i 番目の1粒子状態の占有数を n_i とすると $(i = 1, 2, 3, \cdots)$、全粒子数 N と全エネルギー E は、$N = \sum_i n_i$ および $E = \sum_i \varepsilon_i n_i$ となる。大分配関数 Ξ は、$\Xi = \sum_{\{n\}} \exp\left(-\frac{E - \mu N}{k_\mathrm{B} T}\right)$ で与えられる。ここに、$\sum_{\{n\}}$ は $n_1, n_2, n_3, \cdots$ についての独立な和 $\sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3}\cdots$ である。

(1a) 大分配関数が $\Xi = \prod_i \left[1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon_i - \mu}{k_\mathrm{B} T}\right)\right]^{-1}$ となることを示せ。ここに、化学ポテンシャルは $\mu < \varepsilon_1$ でなければならない。その理由も述べよ。

(2) 以下では、ボース粒子としてフォトンを考える。フォトンの内部自由度は2である。立方体の体積を V として $(V = L^3)$、以下の問に答えよ。

(2a) フォトンの化学ポテンシャルは $\mu = 0$ であるが、この理由を述べよ。

以下では、$\mu = 0$ とする。

(2b) 波数ベクトルが $\vec{k}$ のフォトンのエネルギーを $\varepsilon_{\vec{k}}$ として、自由エネルギー F を $\vec{k}$ についての和として表せ。

以下では、$\varepsilon_{\vec{k}} = c\hbar k$ とする。ここに、c は光速、$k = |\vec{k}|$ である。また、L は十分に大きくて、$\vec{k}$ についての和は積分に置き換えてよいものとする。

(2c) $\mathrm{d}k$ が小さいとして、波数ベクトルの大きさが k と $k + \mathrm{d}k$ の間にある状態の数が $Vk^2\mathrm{d}k/\pi^2$ であることを示せ。

(2d) F を k についての積分として表せ。

(2e) F/V が T^4 に比例することを示せ。

(2f) 圧力 p はエネルギー密度 $\langle E\rangle/V$ に比例することを示せ。ここに、$\langle E\rangle$ は全エネルギー E の期待値である。