平成23年度大学院修士課程入学試験問題

物理学［Ｉ］（125点） 平成22年9月1日(水) 13:00-14:20

注意事項

(1)試験開始の合図があるまでこの問題用紙を開かないこと.

(2)問題用紙はこの表紙を含め3枚,解答用紙は2枚である.

(3)すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること.

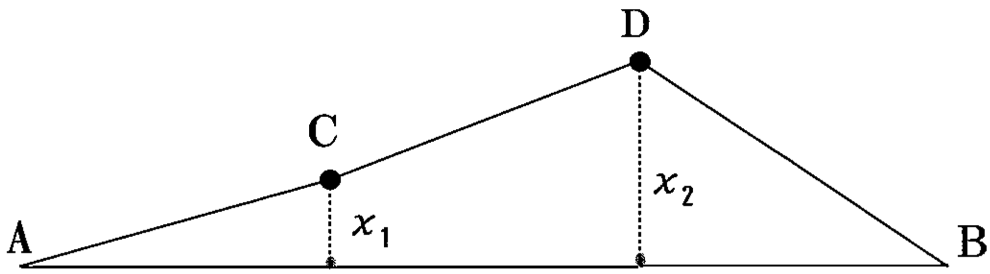
(4)解答は問題[1]，[2]ごとに別々の解答用紙に記入すること.

(5)解答用紙は裏面も使って良い. 解答用紙が足りない場合は試験監督に申し出ること.

(6)問題冊子は持ち帰ること.

物理学 [I]

[1] 長さ $3a$ の質量のない糸を一定の張力 S で強く張る。糸の端点を A、B とし、a の間隔で質量 m の質点を 2 個 C、D の位置に結びつける。図に示すように糸に垂直な方向に質点を微小振動させる。重力は無視せよ。



(1) 系の運動エネルギーを T、位置エネルギーを U とするときラグランジアン L を書け。

(2) 糸の長さの伸びを l とするとき系の位置エネルギーを書け。

(3) C、D の変位を x_1、x_2 とするとき $\overline{\mathrm{AC}}$、$\overline{\mathrm{CD}}$、$\overline{\mathrm{DB}}$ の長さを求め、a との差をそれぞれとることにより系の位置エネルギーを a、x_1、x_2、S を用いて表せ。

(4) 系のラグランジアンを m、a、x_1、x_2、S を用いて書け。

(5) x_1、x_2 について運動方程式を求めよ。

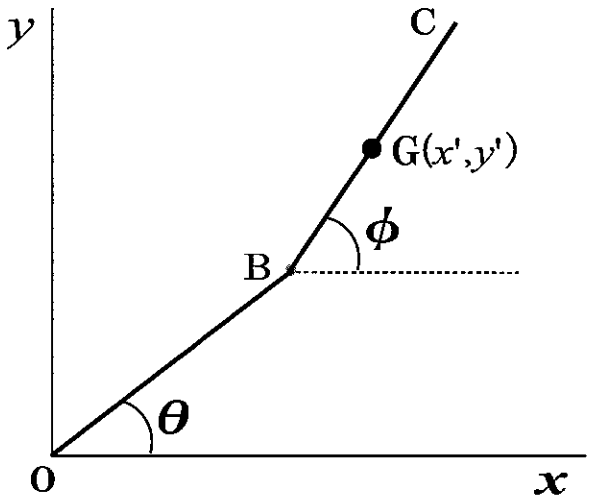
(6) $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha)$、$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha)$ とおいて (5) の運動方程式に代入することにより ω の正の値 (規準振動数) 2 つを求めよ。ただし、t は時間であり、A_1、 A_2、 α は実数の定数である。

(7) (6) より x_1、x_2 に対する規準振動を求めよ。

(8) 規準振動の様子を図示せよ。

(9) x_1、x_2 の運動の一般解を求めよ。

［２］２本の等しい一様な棒 OB、BC が滑らかなちょうつがいで点 B において連結され、図に示すように点 O を固定点として水平面内で自由に回転できるものとする。以下の問いに答えよ。棒 OB、BC の質量をそれぞれ M、長さをそれぞれ $2a$ とする。ただし、水平面内に x 軸、y 軸をとり、水平面に対して垂直上向きに z 軸をとる。また、図に示すように棒 OB と x 軸のなす角度を θ、棒 BC と x 軸のなす角度を ϕ とする。



(1) 棒 OB について、点 O を通る z 軸の周りの慣性モーメントを求めよ。

(2) 棒 OB の運動エネルギーを求めよ。

(3) 棒 BC の重心 G を通り、z 軸に平行な軸の周りの棒 BC の慣性モーメントを求めよ。

(4) 棒 BC の重心 G の座標 (x', y') を a、θ、ϕ で表せ。

(5) 棒 BC の運動エネルギーを求めよ。

(6) 全系のラグランジアン L を書け。

(7) (6) のラグランジアンを用いて θ と ϕ についてラグランジュの運動方程式を書け。ただし、θ と ϕ の時間微分を実行しなくてもよい。

(8) $\psi = \phi - \theta$ が一定である定常運動では $\dot{\phi}$ と $\dot{\theta}$ も一定である。

1) 定常運動の場合、ラグランジュの運動方程式より $\sin\psi = 0$ となることを示せ。

従って $\psi = 0$ または $\psi = \pi$ とおける。$\psi = 0$ で与えられる定常運動は安定であり $\psi = \pi$ で与えられる定常運動は不安定である。

2) 1) の $\psi = 0$ で与えられる定常運動が安定であることを調べるために $\dot{\theta} = \omega + \dot{\epsilon}$ とおいてラグランジュの運動方程式を ϵ と ψ についての微分方程式に書き換えよ。ただし、ω は一定である。また、ϵ と ψ は非常に小さいので ϵ と ψ の 1 次まで考えればよい。

3) 2) で得られた ϵ と ψ についての微分方程式から ϵ を消去して ψ に関する微分方程式を求め、$\psi = 0$ のまわりの微小振動の周期を求めよ。

平成23年度大学院修士課程入学試験問題

物理学［Ⅱ］ (125点) 平成22年9月1日(水) 14:50-16:10

注意事項

(1)試験開始の合図があるまでこの問題用紙を開かないこと.

(2)問題用紙はこの表紙を含め4枚,解答用紙は3枚である.

(3)すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること.

(4)解答は問題[1], [2], [3]ごとに別々の解答用紙に記入すること.

(5)解答用紙は裏面も使って良い. 解答用紙が足りない場合は試験監督に申し出ること.

(6)問題冊子は持ち帰ること.

物理学 [II]

[1] 図1左のように、真空中に極板面積が S、間隔が d の平行板コンデンサーを用意し、コンデンサーの電極1と2を導線で点Aに接続しておく。このとき、コンデンサーおよび導線は電荷を蓄えていないものとする。次に図1右のように、コンデンサーの電極と同じ形状で電荷 Q を帯びた導体板を、電極1と2の間に電極に平行に完全に挿入した。導体板と電極1の間隔を x $(0 < x < d)$ とし、導体板の厚さは無視できるものとする。またコンデンサー内の導体板より上側および下側の電場はそれぞれ一様で、端の効果や導線があることによる電場の乱れは無視できるものとする。真空中の誘電率を ε_0 とする。

1) 仮に電極1と2を結ぶ導線がないとしたとき、導体板と電極1の間の静電容量 C_1、および導体板と電極2の間の静電容量 C_2 をそれぞれ求めよ。

2) 図1右のように導体板中央の点をBとする。点AとBの間が静電容量が C_1 と C_2 の2つのコンデンサーを組み合わせた回路で結ばれているとみなすとき、点AとBの間の合成静電容量を C_1 と C_2 で表せ。

3) 点Aの電位を0としたとき導体板の電位を ε_0、d、x、Q、S で表せ。

4) 導体板表面の電極1側に現れる面電荷、および電極2側に現れる面電荷をそれぞれ d、x、Q で表せ。

5) この回路が蓄えている電気的エネルギーを ε_0、d、x、Q、S で表せ。

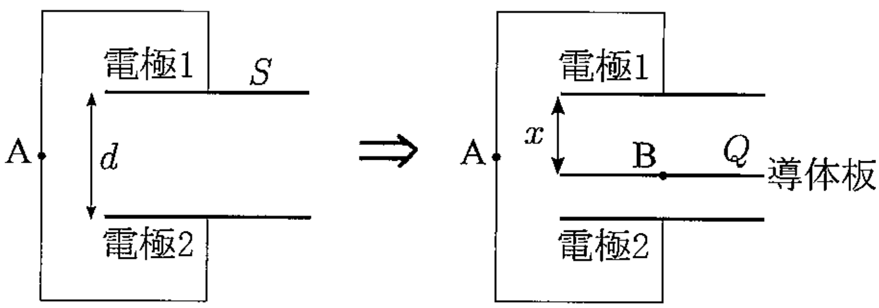


図1

[2] 図 2a のように一周の長さが l で断面が円形の環状鉄心を真空中に置く。鉄心のまわりに導線を n 回巻いてコイルを作り、導線に電流 I を流した。真空中の透磁率を μ_0、鉄の透磁率を μ_1 とする。

1) 鉄心中の磁場を $\boldsymbol{H}$ とする。$\boldsymbol{H}$ は鉄心の中心線と平行で、大きさは一定とみなしてよい。鉄心の中心線上にそって一周する経路 C に対する周回積分 $\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s}$ を I を含む式で表せ。ただし $d\boldsymbol{s}$ は経路上の微小変位ベクトルとする。また電流および経路の向きは図中に矢印で示されたとおりとする。

次に図 2b のようにコイルおよび電流はそのままで、鉄心の直線部分の鉄を一部取り除き、間隔 d の隙間をあけた場合を考える。隙間内の磁場は一様で端の効果は無視できるものとする。

2) 鉄心中および隙間内の磁束密度の大きさは場所によらず同じで B であるとする。鉄心中の磁場の大きさ、および隙間内の磁場の大きさをそれぞれ B、μ_0、μ_1 のうち必要なものを用いて表せ。

3) 周回積分 $\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s}$ を B、 μ_0、 μ_1、 d、 l を用いて表せ。

4) B を求めよ。また $\mu_1 \gg \mu_0$ としたときの B の近似値も求めよ。

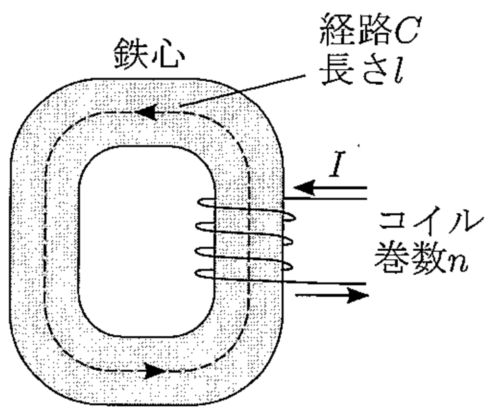


図 2a

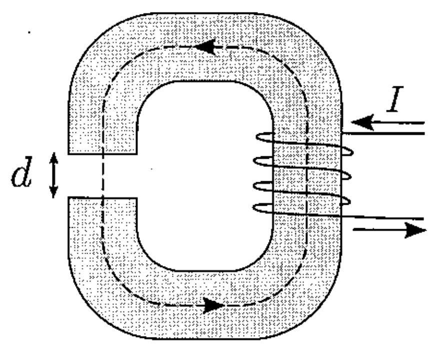


図 2b

[3] 図3のように、真空中に半径aの円形コイル1と半径bの円形コイル2を、それぞれz軸に垂直に置く。コイル1と2の中心はそれぞれz軸上の$z=0$および$z=d$にあり、巻き数はそれぞれ1回である。また$a \ll d$でありコイル2の中心からみたコイル1の立体角は十分小さいものとする。z軸正の向きに右ネジが進むような回転方向に電流を流したとき、その電流の符号を正とする。真空中の透磁率をμ_0とする。

まずコイル1には電流が流れておらず、コイル2に電流I_2が流れている場合を考える。

1) コイル2がコイル1の中心に作る磁束密度のz成分を求めよ。

2) コイル1が十分小さいことから、コイル1の内側の磁束密度が一様であるとしてコイル1を貫く磁束を求めよ。

3) コイル1と2の相互インダクタンスを求めよ。

次にコイル2には電流が流れておらず、コイル1に電流I_1が流れている場合を考える。コイル2は小さくないので、コイル2の内側の磁束密度は一様とはみなせない。

4) コイル2を貫く磁束を求めよ。

5) コイル2の半径をbからわずかに増加させると、コイルの面積が増加し、貫く磁束も増加する。このことをふまえて、コイル2上の任意の点Pにおける磁束密度のz成分を求めよ。

6) 仮にコイル1のかわりに、z軸正の向きで大きさがMの磁気双極子モーメントをz軸上の$z=0$に置いたとき、点Pにおける磁束密度のz成分は$B_z = \dfrac{\mu_0 M}{4\pi}\dfrac{2d^2-b^2}{(d^2+b^2)^{\frac{5}{2}}}$となる。このことを利用して、コイル1の円電流がつくる磁気双極子モーメントの大きさを求めよ。

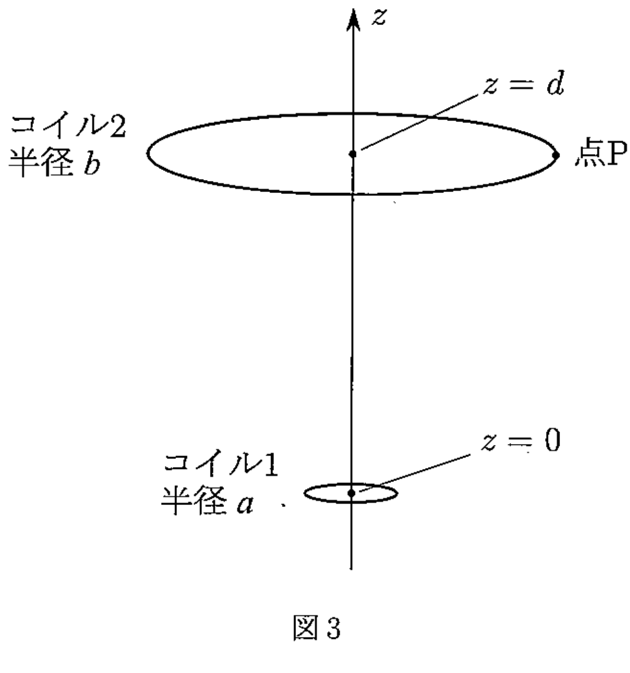


図3

平成23年度大学院修士課程入学試験問題

物理学［Ⅲ］（125点） 平成22年9月1日(水) 16:40-18:00

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの問題用紙を開かないこと.

(2) 問題用紙はこの表紙を含め3枚,解答用紙は2枚である.

(3) すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること.

(4) 解答は問題[1], [2]ごとに別々の解答用紙に記入すること.

(5) 解答用紙は裏面も使って良い. 解答用紙が足りない場合は試験監督に申し出ること.

(6) 問題冊子は持ち帰ること.

物理学［Ⅲ］

[1]　一次元空間で原点から距離xに比例した復元力を受け、角振動数ωで単振動する粒子の量子力学的運動を考える。ここで、粒子の電荷をq、質量をmとする。このとき、復元力によるポテンシャルは$V(x)=\dfrac{1}{2}m\omega^2x^2$と表すことができる。プランク定数を$h$とし、必要に応じて、$\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$を用いよ。

1）時間tに依存するシュレディンガー方程式を書け。ここで、時間に依存する波動関数を$\Psi(x,t)$とせよ。

2）1）から時間に依存しないシュレディンガー方程式を求めよ。ここで、系のエネルギーをεとし、時間に依存しない波動関数を$\phi(x)$として、$\phi(x)$と$\Psi(x,t)$との関係も求めよ。

3）生成演算子$a^\dagger$と消滅演算子aを

$$a^\dagger=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x-\frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right)、\quad a=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x+\frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

と定義すると、$a^\dagger$とaは互いにエルミート共役となっている。系のハミルトニアンHを$a^\dagger$とaで表せ。

4）交換関係　$\left[a,a^\dagger\right]=aa^\dagger-a^\dagger a$　が定数になる。この定数を求めよ。

5）n番目の規格化された固有状態$\phi_n(x)$は　$a^\dagger\phi_n=\sqrt{n+1}\,\phi_{n+1}$　を満足する。このことからa、ϕ_n、ϕ_{n-1}の関係を求めよ。

6）固有状態ϕ_nにおける固有エネルギーε_nを求めよ。

次に、xの正の向きに強さEの一様な電場をかけた。電場による静電エネルギーは、$x=0$でゼロと考え、以下の問いに答えよ。

7）時間に依存しないシュレディンガー方程式を求めよ。ここで、系のエネルギーを$\tilde{\varepsilon}$とし、時間に依存しない波動関数を$\psi(x)$とせよ。

8）n番目の規格化された固有状態$\psi_n(x)$における固有エネルギー$\tilde{\varepsilon}_n$を求めよ。

9）電気双極子モーメントμは、演算子qxの期待値である。規格化されている基底状態ψ_0に対して、μを求めよ。

[2]　電子を金属内に入射させると、入射した電子と金属内の電子が相互作用し、入射した電子の確率の流れ密度は徐々に減少してゆく。この現象を一次元の量子力学的散乱現象として考える。空間座標をxとし、電子の質量をmとする。金属外の領域Ⅰ（$x<0$）ではポテンシャルは$U(x)=0$であり、金属内の領域Ⅱ（$x>0$）では$U(x)=-iW_0$である。ただし、iは純虚数であり、W_0は正の定数である。領域Ⅰからxの正の向きにエネルギーEを持つ電子を入射させると、吸収ポテンシャル$-iW_0$のため、電子の確率の流れ密度は領域Ⅱで徐々に減少する。EとW_0は、正の定数k_0とaを用いて、$E=\dfrac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$、$W_0=\dfrac{\hbar^2 a^2}{2m}$と表されるものとする。ここで、$\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$（$h$はプランク定数）である。定常波に対する確率の流れ密度$j(x)$は、時間に依存しないシュレディンガー方程式の解$\psi(x)$を用いて、

$$j(x)=\frac{\hbar}{2im}\left\{\psi^*(x)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)-\psi(x)\frac{\partial}{\partial x}\psi^*(x)\right\}$$

と表される。

1）領域Ⅰにおける波動関数を$\phi_{\mathrm{I}}(x)$とし、この領域における時間に依存しないシュレディンガー方程式を書き下せ。また、この方程式の解が$\phi_{\mathrm{I}}(x)=A\exp[ik_0x]+B\exp[-ik_0x]$となることを示せ。なお、$A$と$B$は任意定数であり、複素数とする。

2）解$\phi_{\mathrm{I}}(x)$を$A\exp[ik_0x]$と$B\exp[-ik_0x]$に分け、それぞれの部分に対して確率の流れ密度$j(x)$を求めよ。また、入射波か反射波かを特定せよ。

3）領域Ⅱにおける波動関数を$\phi_{\mathrm{II}}(x)$とし、この領域における時間に依存しないシュレディンガー方程式を書き下せ。この方程式の解は透過波を表しており、$\phi_{\mathrm{II}}(x)=C\exp[ipx]$と書くことができる。波数$p$の２乗を$k_0$、$a$を用いて表せ。なお、$C$は任意定数であり、複素数とする。

4）　波数pの実数部をp_{R}、虚数部をp_{I}と表したとき、領域Ⅱにおける確率の流れ密度$j(x)$を、x、C、m、$\hbar$、p_{R}、p_{I}を用いて表せ。

5）$x=0$で波動関数はなめらかな関数である。$\dfrac{B}{A}$、$\dfrac{C}{A}$をk_0、pを用いて表せ。

6）反射率Rとは、反射波に対する確率の流れ密度の絶対値を入射波に対する確率の流れ密度の絶対値で割ったものである。５）の結果を使って、反射率Rをk_0、p_{R}、p_{I}を用いて表せ。

7）透過率Tとは、透過波に対する確率の流れ密度の絶対値を入射波に対する確率の流れ密度の絶対値で割ったものである。この問題では、Tはxの関数である。５）の結果を使って、透過率$T(x)$をk_0、p_{R}、p_{I}、xを用いて表せ。

平成23年度大学院修士課程入学試験問題

物理学［IV］（125点） 平成22年9月2日(木) 9:00-10:20

注意事項

(1)試験開始の合図があるまでこの問題用紙を開かないこと.

(2)問題用紙はこの表紙を含め5枚,解答用紙は2枚である.

(3)すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること.

(4)解答は問題[1]，[2]ごとに別々の解答用紙に記入すること.

(5)解答用紙は裏面も使って良い．解答用紙が足りない場合は試験監督に申し出ること.

(6)問題冊子は持ち帰ること.

物理学［IV］

[1] 軸対称な棒状分子 N 個が体積 V の容器に閉じ込められた気体を考える。一個の棒状分子の質量を m とする。棒状分子は十分に細く、対称軸まわりの慣性モーメントを無視する。棒状分子の重心を通り対称軸に垂直な軸のまわりの慣性モーメントを I とする。この気体は、温度 T の熱浴に接していて、熱平衡状態にある。ボルツマン定数を k とし、プランク定数を h とする。系は、分子を古典的に扱っても良い程度の高温にあり、分子間の相互作用を無視できるものとする。

棒状分子の回転運動は、２つの角度 θ、ϕ で表される。ここで、θ は、Z 軸と棒状分子の角度であり、ϕ は、X-Y 平面内の方位角である。２つの角度 θ、ϕ に対応する正準共役な運動量を P_θ、P_ϕ とするとき運動エネルギーは、$P_\theta^2/(2I) + P_\phi^2/(2I\sin^2\theta)$ と表される。

必要ならば次の積分公式を使ってよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \exp(-\frac{x^2}{\sigma}) = \sqrt{\pi\sigma}$$

1) この気体の分配関数を Z_0 とする。Z_0 が

$$Z_0 = \frac{1}{N!}\left(\frac{2^{9/2}\,\pi^{7/2}\,m^{3/2}\,I\,V\,(kT)^{5/2}}{h^5}\right)^N$$

と求められることを導きなさい。

2) 気体のヘルムホルツの自由エネルギー F_0 を N、m、V、T、I、k、h を使って表しなさい。

3) 気体のエントロピー S_0 を N、m、V、T、I、k、h を使って表しなさい。

次に、この棒状分子が電気双極子モーメント μ を持っている場合を考える。分子が持つ双極子モーメント間の相互作用を無視する。この気体に外部から大きさ E の一様な電場を印加する。外部電場が印加されていても、系を古典的に扱う。電場ベクトルの向きを Z 軸にとる。一つの分子と電場の相互作用ハミルトニアン H_1 は、

$$H_1 = -\mu E\cos\theta$$

とかける。

4) 気体の分配関数を $Z_1 = AZ_0$ と書く。A を求めなさい。

5) 外部電場が印加されることによる、エントロピーの変化を外部電場 E の関数と考え、$\Delta S(E)$ と書く。$\Delta S(E)$ を求めなさい。ただし、外部電場 E が十分に小さいと仮定して、$(\mu E/(kT))$ の 4 乗以上の項を無視しなさい。

6) ここで、熱浴との接触を遮断して、断熱を保って、外部電場を E から 0 へ変化させた。その結果、気体の温度が T から T_1 へ変化した。T_1 を求めなさい。
ただし、外部電場によるエントロピーの変化としては、前問 5) の答えを使いなさい。

[2] N 個のイジングスピン S_1、S_2、$\cdots$、 S_N が直線上に並んだ一次元磁性体を考える。各イジングスピン S_n （$n=1$、2、 $\cdots$、 N）の取りうる値は $S_n=1$ または $S_n=-1$ であり、最隣接スピン間でのみ相互作用する。相互作用ハミルトニアン H_0 は

$$H_0 \;=\; -J\sum_{n=1}^{N-1} S_nS_{n+1}$$
$$(S_n=\pm 1, J>0)$$

である。ここに J は正の定数である。この一次元磁性体のスピン S_1 の近くに別の強磁性不純物があり、この不純物がつくる磁場が S_1 に作用している。 このイジングスピン系全体のハミルトニアン H は、

$$H \;=\; H_0 - DS_1$$

である。特に $N=1$ のときは、$H=-DS_1$ と定義する。ここに、D は正の定数である。系全体は、温度 T の熱浴に接していて熱平衡状態にあるとする。ボルツマン定数を k とし、$\beta=1/(kT)$ とする。

全てのスピンが $S_n=1$ であるスピン配列状態を状態 1 とする。
全てのスピンが $S_n=-1$ であるスピン配列状態を状態 2 とする。

1) 状態 1 におけるイジングスピン系のエネルギー E_1 と状態 2 におけるイジングスピン系のエネルギー E_2 を求めなさい。

2) 状態 1 の出現確率、状態 2 の出現確率をそれぞれ q_1、q_2 とする。q_2/q_1 を求めなさい。

分配関数 Z を求めるために、スピン系を構成するスピンの数が L 個の場合の分配関数を $Z(L)$ と書く。分配関数の定義から

$$Z(L) \;=\; \sum_{\{S_1=\pm 1\}}\cdots\sum_{\{S_L=\pm 1\}} \exp(-\beta H) \qquad \text{(A)}$$

と表される。

3) $Z(1)$ を求めなさい。

4) $Z(2)$ を求めなさい。

5) $L=3$ のとき式 (A) において、S_3 に関する和をとると

$$Z(3) \;=\; \sum_{\{S_1=\pm 1\}} \sum_{\{S_2=\pm 1\}} \exp\Big(\beta(DS_1 + JS_1S_2)\Big)\Big(\exp(\beta JS_2) + \exp(-\beta JS_2)\Big)$$

と表される。S_1 と S_2 に関する和をとり、$Z(3)$ を求めなさい。

6) $4 \leq L$ のとき、次の漸化式が成立することを導きなさい。

$$Z(L) \;=\; \Big(\exp(\beta J) + \exp(-\beta J)\Big)Z(L-1)$$

7) $L=N$ のときの分配関数 Z を N、β、J、D を用いて表しなさい。

8) このスピン系のエネルギーの期待値 $\langle E\rangle$ を求めなさい。

9) S_1 の期待値 $\langle S_1\rangle$ を求めなさい。